

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“

Blatt 8

Aufgabe 1.

Es seien K ein Körper und $l, m, n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (A_{i,j})_{\substack{i \in \{1,2,\dots,m\} \\ j \in \{1,2,\dots,n\}}} \in M_{m \times n}(K)$ sei die *transponierte Matrix* $A^t \in M_{n \times m}(K)$ definiert durch:

$$(A^t)_{i,j} := A_{j,i} \quad \text{für alle } i \in \{1,2,\dots,m\}, j \in \{1,2,\dots,n\}$$

Zeigen Sie, dass $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ für alle $A \in M_{m \times n}(K)$ und $B \in M_{n \times l}(K)$ gilt.

Aufgabe 2.

Es sei K ein Körper. Wir sagen, dass eine quadratische Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ *nilpotent* sei, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A^r = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{r\text{-mal}} = 0$ gilt. Weiter nennen wir eine quadratische Matrix

$B = (B_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} \in M_{n \times n}(K)$ eine *echt obere Dreiecksmatrix*, falls $B_{i,j} = 0$ für alle $i \geq j$ gilt.

- Zeigen Sie, dass alle quadratischen echt oberen Dreiecksmatrizen nilpotent sind.
- Finden Sie eine nilpotente Matrix, die keine echt obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie den Lösungsraum des folgenden homogenen Linearen Gleichungssystems und geben Sie in jedem Schritt an, welche Zeilenoperationen Sie anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie den Lösungsraum des folgenden inhomogen Linearen Gleichungssystems und geben Sie in jedem Schritt an, welche Zeilenoperationen Sie anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 19 \\ 12 \\ 2c \end{pmatrix}$$

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe geben Sie bitte nicht ab; sie wird in den Tutorien am 11. und 12. Dezember 2013 besprochen.

Aufgabe 5. Wahr oder Falsch?

Es sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen.

- a) Die Menge der quadratischen Matrizen $B = (B_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}}$, für die $B_{i,j} = 0$ für alle $i < j$ gilt, ist ein Unterring von $M_{n \times n}(K)$.
- b) Ist $y \in K^n$ eine Lösung des Linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$, so ist auch $y + y + y + y$ eine Lösung.
- c) Sei V ein 15-dimensionaler K -Vektorraum. Dann gibt es einen 6-dimensionalen Unterraum U und einen 8-dimensionalen Unterraum W , so dass $U + W$ gerade 7-dimensional ist.
- d) Es sei U ein von 8 Vektoren erzeugter Unterraum eines 6-dimensionalen K -Vektorraumes V . Dann enthält U ein Erzeugendensystem von V .
- e) Es sei V ein dreidimensionaler Vektorraum und $0 \neq v \in V$. Dann gibt es unendlich viele Unterräume U von V , so dass $\langle v \rangle + U = V$ und $\langle v \rangle \cap U = \{0\}$ gilt.