

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“

Blatt 7

Aufgabe 1.

Es seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und U_1, U_2 Unterräume von V .

- a) Zeigen Sie, dass stets $U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$ gilt.
- b) Zeigen Sie, dass für einen Unterraum T von U_1 stets $U_1 \cap (U_2 + T) = (U_1 \cap U_2) + T$ gilt.

Aufgabe 2.

- a) In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die zwei Unterräume

$$U_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_4 = 0 \right\}.$$

Geben Sie eine Basis von $U_1 + U_2$ an.

- b) Es sei V ein fünfdimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und es sei $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ eine Basis von V . Weiter seien die folgenden Untervektorräume gegeben:

$$W_1 := \langle v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, 5v_1 + 4v_2 + 4v_3 - v_4 \rangle \quad \text{und} \\ W_2 := \langle 7v_1 + v_3, 2v_1 + 2v_2 + 2v_3, v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 \rangle.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $W_1 \cap W_2$ und eine von $W_1 + W_2$.

Aufgabe 3.

Es seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und U_1, U_2 Unterräume von V . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- a) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$
- b) $\dim U_1 + U_2 = \dim U_1 + \dim U_2$
- c) Für jede Basis $\mathcal{B}_1$ von U_1 und jede Basis $\mathcal{B}_2$ von U_2 ist $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ eine Basis von $U_1 + U_2$.
- d) Für jedes $u \in U_1 + U_2$ existieren eindeutig bestimmte $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $u = u_1 + u_2$.

Aufgabe 4.

Gegeben seien die folgenden Matrizen A, B, C, D, E über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 5 & 0 \\ 0 & 2i & 1 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 \\ 1+3i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{10} & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1+3i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2-5i} & 2+5i \\ 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von je zwei der genannten Matrizen.

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe geben Sie bitte nicht ab; sie wird in den Tutorien am 4. und 5. Dezember 2013 besprochen.

Aufgabe 5.

- a) Es seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und T, U_1 und U_2 Unterräume von V . Zeigen Sie, dass stets $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap T) \subseteq U_1 \cap (U_2 + T)$ gilt, aber die Umkehrung $U_1 \cap (U_2 + T) \subseteq (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap T)$ im Allgemeinen nicht gilt.
- b) Zeigen Sie, dass $C := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation ein Körper ist.
- c) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Geben Sie für jedes $j \leq m \cdot n$ einen j -dimensionalen Untervektorraum von $M_{m \times n}(K)$ an.