

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“ Blatt 6

Aufgabe 1.

Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an und begründen Sie Ihre Wahl:

- a) $\langle t^3, t^3 + 5, t^3 + t^2 + 5, t^2 + t^4, t^4 + 10 \rangle \subseteq \mathbb{R}[t]$
- b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3 \right\}$
- c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$
- d) $\mathbb{R}^{(\mathbb{R})} := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \text{die Menge } \mathbb{R} \setminus f^{-1}(0) \text{ ist endlich} \}$

Aufgabe 2.

Betrachten Sie die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

- a) Zeigen Sie, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist.
- b) Bestimmen Sie alle unverlängerbaren linear unabhängigen Teilmengen von $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
- c) Stellen Sie für jede dieser Teilmengen $\mathcal{B}'$ die Vektoren aus $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ als Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}'$ dar. Warum ist das möglich?

Aufgabe 3.

Es sei $a \in \mathbb{Q}$. Betrachten Sie die Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{Q}$ -Vektorraum $V := \mathbb{Q}^3$.

- a) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ ist das Tupel $(u_1, u_2, u_3) \in V^3$ linear unabhängig?
- b) Bestimmen Sie die Dimension von $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq V$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4.

Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum. Es seien $x_1, \dots, x_n$ Vektoren in V , so dass das Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ linear unabhängig ist. Zeigen Sie:

- a) Das Tupel $(x_1, \dots, x_n, x_1 + \dots + x_n)$ ist linear abhängig, aber je n dieser Vektoren sind linear unabhängig.
- b) Es seien $a_1, \dots, a_n \in K$ und $x := \sum_{j=1}^n a_j x_j \in V$. Dann gilt:

$$(x_1 - x, \dots, x_n - x) \text{ ist linear unabhängig} \iff \sum_{j=1}^n a_j \neq 1$$

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe geben Sie bitte nicht ab; sie wird in dem Tutorium am 28. November 2013 besprochen.

Aufgabe 5.

- a) Wir fassen $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ auf. Zeigen Sie, dass $(\sqrt{3}, \sqrt{7})$ linear unabhängig, aber keine $\mathbb{Q}$ -Basis von $\mathbb{R}$ ist.
- b) Es seien V und W endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper K . Dann wird das direkte Produkt $V \times W$ durch

$$\begin{aligned} +: (V \times W) \times (V \times W) &\longrightarrow V \times W, & (v, w) + (v', w') &= (v + v', w + w') \\ \cdot: K \times (V \times W) &\longrightarrow V \times W, & k \cdot (v, w) &= (kv, kw) \end{aligned}$$

zu einem K -Vektorraum. Beweisen Sie:

$$\dim_K V \times W = \dim_K V + \dim_K W$$