

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“

Blatt 5

Aufgabe 1.

Sind die folgenden Tupel jeweils linear unabhängig?

a) $(1, (1+t), (1+t)^2)$ in dem Polynomring $K[t]$

b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ in $\mathbb{R}^4$

c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{7} \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ in $\mathbb{R}^3$

d) (f, g) in $\mathbb{R}^X$, wobei $X := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und die Abbildungen $f, g \in \mathbb{R}^X$ definiert seien durch $f(x) = \frac{1}{4+x}$ und $g(x) = \frac{1}{8+2x}$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 2.

In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die zwei Unterräume

$$U_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_4 = 0 \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass U_2 ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist. Geben Sie ein Erzeugendensystem von U_2 an.

b) Berechnen Sie $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 3.

Im $\mathbb{R}^4$ seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis B von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

b) Ergänzen Sie B durch geeignete Vektoren zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 4.

Es seien K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es sei ferner $(v_1, \dots, v_n)$ ein Tupel von Vektoren in V . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $(v_1, \dots, v_n)$ sind linear abhängig.

b) Es gibt ein i , so dass sich v_i als Linearkombination von $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ schreiben lässt.

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe geben Sie bitte nicht ab; sie wird nur in den Tutorien am 20. und 26. November 2013 besprochen.

Aufgabe 5.

- a) Es seien in $\mathbb{R}^3$ die folgenden vier Vektoren gegeben:

$$w = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie den Vektor w als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 dar. Ist das Tupel (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig? Ist es ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

- b) Es sei $X := \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und f und g seien Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \frac{1}{7+x} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{4+x} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Ist das Tupel (f, g) in $\mathbb{R}^X$ linear unabhängig?

- c) Geben Sie einen von $\mathbb{R}[t]$ verschiedenen Untervektorraum von $\mathbb{R}[t]$ an, der die Polynome $t^3 + t^2$ und $t^3 + t$ enthält.