Prof. Dr. M. Reineke
Dr. A.-L. Grensing
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe bis 10:00 Uhr
am 13.11.13
in die Postfächer der Tutoren
auf D13

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“
Blatt 3

Aufgabe 1.
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

a) Zeigen Sie, dass das neutrale Element in G eindeutig bestimmt ist, d.h.: Sind e und $\tilde{e}$ Elemente in G mit der Eigenschaft „neutrales Element in G sein“[1], so gilt schon $e = \tilde{e}$.

b) Zeigen Sie ebenso, dass das zu jedem Element existierende inverse Element in G eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2.
Es seien $(G, \circ)$ und $(H, \star)$ Gruppen. Das neutrale Element in G sei mit e_G bezeichnet, das von H mit e_H. Beweisen Sie:

a) *(Untergruppen-Kriterium:)* Es sei U eine Teilmenge von G. Dann gilt:

$$U \text{ ist Untergruppe von } G \Longleftrightarrow U \neq \emptyset \text{ und für alle } x, y \in U \text{ gilt: } xy^{-1} \in U$$

b) Es sei $f \colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $f(G)$ eine Untergruppe von H und $\ker(f) := \{x \in G \mid f(x) = e_H\} = f^{-1}(\{e_H\})$ ist eine Untergruppe von G.

c) Wir definieren auf dem Kartesischen Produkt $G \times H$ eine Verknüpfung:

$$\circ_{G\times H} \colon (G \times H) \times (G \times H) \longrightarrow (G \times H), ((g, h), (\tilde{g}, \tilde{h})) \mapsto (g \circ \tilde{g}, h \star \tilde{h})$$

Dann ist $(G \times H, \circ_{G\times H})$ eine Gruppe.

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \circ)$ eine Gruppe ist, wobei die Verküpfung $\circ$ definiert sei durch
$a \circ b := ab + a + b$ für alle $a, b \in Q \setminus \{-1\}$.

b) Finden Sie drei Untergruppen von $\mathbb{Z}_{2013}$.

---

[1] *Hinweis: Ein Element e hat die Eigenschaft „neutrales Element in G sein“, wenn für e Eigenschaften b) und c) in der Definition einer Gruppe gelten:*

- $e \circ x = x = x \circ e$ für alle $x \in G$.
- Zu jedem $y \in G$ existiert $y' \in G$ mit: $y' \circ y = e = y \circ y'$.

Dementsprechend hat $\tilde{e}$ die Eigenschaft „neutrales Element in G sein“, wenn für $\tilde{e}$ Eigenschaften b) und c) in der Definition einer Gruppe gelten:

- $\tilde{e} \circ a = a = a \circ \tilde{e}$ für alle $a \in G$
- Zu jedem $z \in G$ existiert $z' \in G$ mit: $z' \circ z = \tilde{e} = z \circ z'$.

Bitte beachten Sie: Die Übungsleiter werden zu Aufgabe 4. nur notieren, ob sie von Ihnen bearbeitet worden ist. Sie werden also auf eine ausführliche Korrektur verzichten. Die Aufgabe 4. wird außerdem in den Tutorien am Mittwoch, den 13.11.13, und am Dienstag, den 19.11.13, besprochen.

Aufgabe 4.

a) Finden Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus von der Diedergruppe D_4 in die symmetrische Gruppe $S_4 := S(\{1, 2, 3, 4\})$.
Tipp: Betrachten Sie die Elemente von D_4, also die in der Vorlesung vorgestellten Bewegungen in der Ebene, die ein Quadrat $ABCD$ wieder in sich überführen. Notieren Sie sich jeweils, was mit den Ecken A, B, C und D des Quadrates passiert.

b) Finden Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ in die symmetrische Gruppe S_4.
Tipp: Betrachten Sie die Symmetriegruppe eines nicht gleichseitigen Rechtecks.

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe geben Sie bitte nicht ab; sie wird nur in den Tutorien am 11. und 12. November besprochen.

Aufgabe 5. Wahr oder falsch?
Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Ist $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und $x \in G$, so ist das inverse Element von $f(x)$ gerade $f(x^{-1})$.

b) Es sei U eine Untergruppe einer Gruppe $(G, \circ)$. Dann ist $(U, \circ|_{U\times U})$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G.

c) Es ist $\{\overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

d) Die Abbildung $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, z \mapsto 3z$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$.

e) Die Abbildung $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, z \mapsto 3z + 7$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$.