Prof. Dr. M. Reineke
Dr. A.-L. Grensing
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe bis 10:00 Uhr
am 06.11.13
in die Postfächer der Tutoren
auf D13

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“
Blatt 2

Aufgabe 1.

a) Wir betrachten die drei Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2\ , \quad g\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (x,y)\mapsto 3x+7 \quad \text{und} \quad h\colon \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ (x,y)\mapsto 3x+7.$$

Welche der Abbildungen f, g, h besitzt eine linksinverse (oder eine rechtsinverse) Abbildung? Geben Sie, sofern es möglich ist, zu jeder Abbildung bis zu zwei von einander verschiedene linksinverse (beziehungsweise bis zu zwei von einander verschiedene rechtsinverse) Abbildungen an.

b) Bestimmen Sie die Menge der bijektiven Selbstabbildungen auf der Menge $\{1, 2, 3\}$. Geben Sie zu jeder Bijektion ihre Umkehrabbildung an.

Aufgabe 2.
Welche der im Folgenden gegebenen Relationen sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$?

a) $R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,|\, x = y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,|\, x \text{ ist gerade und } y \text{ ist ungerade }\}$
$\cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,|\, x \text{ ist ungerade und } y \text{ ist gerade }\}$

b) $R_2 := \{(1, -4), (1, 1), (-4, -4), (-4, 1), (-4, 2), (2, 2), (2, -4), (1, 2), (2, 1)\}$

c) $R_3 := \{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,|\, \text{ es existiert } a \in \mathbb{Z} \text{ mit } 3\cdot a = x - y\}$

Aufgabe 3.
Es sei X eine endliche Menge und $f\colon X \longrightarrow X$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist injektiv } \iff f \text{ ist surjektiv } \iff f \text{ ist bijektiv}$$

Aufgabe 4.
Es sei X eine endliche Menge. Beweisen Sie, dass für die Kardinalität $|\mathcal{P}(X)|$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X gilt:

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}.$$

Tipp: Betrachten Sie für jede Teilmenge A von X die eindeutig bestimmte Abbildung

$$\chi_A\colon X \longrightarrow \{0,1\}, \quad y \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } y \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass die folgende Abbildung eine Bijektion ist:

$$\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathrm{Abb}(X, \{0,1\}), \quad A \mapsto \chi_A.$$

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe geben Sie bitte nicht ab; sie wird nur in den Tutorien am 5. und 6. November besprochen.

Aufgabe 5. Wahr oder falsch?
Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Es seien f und g Abbildungen, so dass $f \circ g$ injektiv ist. Dann ist f injektiv.

b) Jede Abbildung ist stets die Komposition einer surjektiven und einer injektiven Abbildung (in dieser Reihenfolge).

c) Die leere Menge ist Element einer jeden Menge.

d) Ist Y eine endliche Menge, so ist die Kardinalität von Y kleiner als die von $Y \times Y$ und diese ist kleiner als die von $\mathcal{P}(Y)$.

e) Jede symmetrische und transitive Relation $R \subseteq X \times X$ ist reflexiv auf X.

f) Eine Abbildung ist nie eine Äquivalenzrelation.