

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“ Blatt 1

Aufgabe 1.

Es X eine Menge. Es seien weiter A, B und C Teilmengen von X . Beweisen Sie die folgenden Mengengleichheiten und die Äquivalenzaussage:

- a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
- b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$,
- c) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$,
- d) $A \cup B = A \iff B \subseteq A$.

Aufgabe 2.

Es seien X und Y Mengen und $f: X \rightarrow Y$ sei eine Abbildung. Es seien weiter A und B Teilmengen von X sowie C und D Teilmengen von Y . Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Bilder und Urbilder von f :

- a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ und $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$,
- b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ und $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$,
- c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ und $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
- d) Im Allgemeinen gilt nicht: $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Aufgabe 3.

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen jeweils auf Surjektivität und auf Injektivität:

- a) $f_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$,
- b) $f_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$
- c) $f_3: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y)$.

Aufgabe 4.

Es sei $X := \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$.

Es sei $f: X \rightarrow X$ eine Abbildung definiert durch $\spadesuit \mapsto \spadesuit, \heartsuit \mapsto \spadesuit, \clubsuit \mapsto \clubsuit, \diamondsuit \mapsto \heartsuit$.

Weiter sei $g: X \rightarrow X$ eine Abbildung definiert durch $\spadesuit \mapsto \diamondsuit, \heartsuit \mapsto \clubsuit, \clubsuit \mapsto \heartsuit, \diamondsuit \mapsto \spadesuit$.

- a) Bestimmen Sie die Fasern von f und g und untersuchen Sie die Abbildungen auf Surjektivität.
- b) Welche der Kompositionen $f \circ g, g \circ f, f \circ f$ und $g \circ g$ sind injektiv; welche sind surjektiv; welche sind bijektiv?
- c) Geben Sie eine Abbildung h mit Definitionsbereich X an, die injektiv aber nicht bijektiv ist.
- d) Wie viele bijektive Abbildungen von X nach X gibt es?