

9. Übungsblatt zur Einführung in die Algebra

Auf diesem Blatt wird gezeigt, dass im Allgemeinen die Umkehrung des Lemmas 10.3 nicht gilt.

Aufgabe 1.

2 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $g = \sum_{j=0}^n a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$, so dass $aX + b$ ein Teiler von g ist. Dann ist a ein Teiler des Leitkoeffizienten a_n sowie b einer des konstanten Terms a_0 von g und $-b/a$ ist eine Nullstelle von g in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2.

4 Punkte

Betrachten Sie das Polynom $f = X^4 - 10X^2 + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie:

(a) Es hat f in $\mathbb{Z}[X]$ keine Teiler vom Grad 1.

(b) Es hat f in $\mathbb{Z}[X]$ keine Teiler vom Grad 2.

Schließen Sie daraus, dass f irreduzibel über $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3.

6 Punkte

Sei p eine Primzahl und $\overline{\cdot} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, z \mapsto z + p\mathbb{Z}$ gegeben. Es sei $\overline{2}$ oder $\overline{3}$ oder $\overline{6}$ ein Quadrat in $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$. Betrachten Sie das Polynom $\overline{f} := X^4 - \overline{10}X^2 + \overline{1}$ in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$. Zeigen Sie, dass dann $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ existieren mit

$$\overline{f} = (X^2 + \overline{a}X + \overline{b})(X^2 + \overline{c}X + \overline{d}).$$

Aufgabe 4.

6 Punkte

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Gilt $p = 4k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so existiert ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid x^2 + 1$.
(Hinweis: Homomorphiesatz für $\dots \overline{x} \mapsto \overline{x^2}$ und Satz von Cauchy.)

(b) Es ist $U := \{a^2 \mid a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\}\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ vom Index 2.

Schließen Sie daraus, dass für jede Primzahl p das Polynom $\overline{f}$ aus Aufgabe 3 reduzibel ist.

Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur findet am Donnerstag, den 21. Juli 2016, von 10:00 Uhr bis 12:00 Uhr statt.
- Die Klausurzulassung wird nach der letzten Übung am 13. Juli 2016 festgestellt.
- Wir bitten um eine Voranmeldung zur Klausur in der Vorlesung am 13. Juni oder per E-Mail an gensing@uni-wuppertal.de.

Abgabe bis Montag, den **20.06.16**, um 10:00 Uhr (s.t.) in das Postfach 15 auf D.13.

Wir bitten um Gruppenabgaben mit jeweils zwei Studenten!

Aktuelles und Übungsblätter unter <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~gensing/lehre.html>