

8. Übungsblatt zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1.

2 + 2 Punkte

Es sei K ein Körper. Wir definieren die formale Ableitung:

$$D: K[X] \longrightarrow K[X], \quad \sum_{k=0}^r a_k X^k \mapsto \sum_{k=1}^r k a_k X^{k-1}$$

Seien $a \in K$ und $f \in K[X]$ ein Polynom. Zeigen Sie:

- (a) Es ist a genau dann eine Nullstelle von f , wenn $(X - a)$ ein Teiler von f ist.
- (b) Es ist a eine doppelte Nullstelle von f , wenn a eine Nullstelle von f und von $D(f)$ ist.
(Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Produktregel für die formale Ableitung.)

Aufgabe 2.

2 Punkte

Seien R und K Körper mit $R \subseteq K$. Sei $\varphi: K \longrightarrow K$ ein Körperhomomorphismus, der die Elemente von R fix läßt. Dann ist für jedes Polynom $f \in R[X]$ und jede Nullstelle $a \in K$ von f auch $\varphi(a)$ eine Nullstelle von f .

Aufgabe 3.

2 + 1 + 3 Punkte

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Ein Ideal I von R heißt Primideal, wenn folgende Bedingung für alle $a, b \in R$ gilt: Ist $ab \in I$, so gilt $a \in I$ oder $b \in I$.

- (a) Zeigen Sie: I ist ein Primideal genau dann, wenn R/I ein Integritätsring ist.
- (b) Die Primideale von $\mathbb{Z}$ sind genau die Ideale (p) mit p Primzahl.
- (c) Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie, dass das Ideal $(2, X)$ ein Primideal in $\mathbb{Z}[X]$ ist, aber kein Hauptideal.

Aufgabe 4.

4 Punkte

Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad 3. Begründen Sie, dass $\mathbb{R}[X]/(f)$ kein Körper ist.

Zusatzaufgabe

2+4 Punkte

Sei R ein kommutativer Ring und A ein Ideal in R . Es sei $\sqrt{A} := \{a \in R \mid a^k \in A \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$ das auf Blatt 7 definierte Radikal von A . Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das sogenannte Nilradikal $N := \sqrt{0}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie anschließend das Nilradikal in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/N$.

Hinweis zur Bewertung der Zusatzaufgabe: Die Bearbeitung ist freiwillig. Es gibt aber bei erfolgreicher Bearbeitung Bonuspunkte in der Gesamtbilanz.

Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur findet am Donnerstag, den 21. Juli 2016, während der Vorlesungszeit statt.
- Die Klausurzulassung wird nach der letzten Übung am 13. Juli 2016 festgestellt.
- Wir bitten um eine Voranmeldung zur Klausur in den Vorlesungen am 9. und am 13. Juni oder per E-Mail an grensing@uni-wuppertal.de.