

7. Übungsblatt zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1.

2 + 2 + 2 Punkte

Es seien R ein Hauptidealring und $c, a_1, \dots, a_n \in R$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Diophantische Gleichung $a_1X_1 + \dots + a_nX_n = c$ genau dann in R lösbar ist, wenn c durch einen größten gemeinsamen Teiler von $a_1, \dots, a_n$ teilbar ist.
- (b) Die Gleichung $aX + bY = c$ mit $a, b \in R \setminus \{0\}$ besitze eine Lösung (x, y) in R^2 . Beschreiben Sie alle Lösungen dieser Diophantischen Gleichung.
- (c) Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ von $102X + 90Y = 108$.

Aufgabe 2.

2 + 2 + 2 Punkte

Sei R ein kommutativer Ring. Sei $\mathcal{I}$ eine Menge von Idealen $I_j, j \in \mathbb{N}$ in R mit $I_j \subsetneq I_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Vereinigung $U := \bigcup \mathcal{I} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ der Ideale wieder ein Ideal in R bildet.
- (b) Zeigen Sie, dass U nicht von der Form $(a_1, \dots, a_n)$ für Elemente $a_1, \dots, a_n \in R$ sein kann.
- (c) Zeigen Sie damit, dass der Polynomring über einem beliebigen Körper in den Variablen $X_i, i \in \mathbb{N}$ nicht noethersch ist.

Aufgabe 3

1+2+1 Punkte

Sei R ein kommutativer Ring und A ein Ideal in R . Man nennt $\sqrt{A} := \{a \in R \mid a^n \in A \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ das Radikal von A . Man nennt A reduziert, wenn $A = \sqrt{A}$ gilt. Zeigen Sie:

- (a) $\sqrt{A}$ ist ein Ideal in R .
- (b) A ist genau dann reduziert, wenn R/A keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ besitzt. Dabei heißt ein Element a eines Ringes nilpotent, wenn $a^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt.
- (c) Primideale sind reduziert. Dabei heißt ein Ideal I eines Ringes Primideal, wenn für alle $a, b \in R$ gilt: Ist $ab \in I$, so gilt $a \in I$ oder $b \in I$.

Zusatzaufgabe

4 Punkte

Sei G eine endliche abelsche Gruppe und n die maximale Ordnung eines Elements in G . Dann gilt $o(g) \mid n$ für alle $g \in G$.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass im direkten Produkt $H \times K$ das Element (h, k) mit $h \in H$ und $k \in K$ die Ordnung $\text{kgV}(o(h), o(k))$ hat.)

Hinweis zur Bewertung der Zusatzaufgabe: Die Bearbeitung ist freiwillig. Es gibt aber bei erfolgreicher Bearbeitung Bonuspunkte in der Gesamtbilanz.