Prof. Späth
Dr. Grensing **SS 2016**

6. Übungsblatt zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. 1 + 3 + 2 Punkte

Sei $d = -1$ oder $d \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl der Form $d = \pm p_1 \dots p_r$, wobei $p_1, \dots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen sind.
Ist $d > 0$, so sei $\sqrt{d} \in \mathbb{R}$ die positive reelle Quadratwurzel aus d; ist $d < 0$, so sei $\sqrt{d} = i\sqrt{-d} \in \mathbb{C}$.
Damit setzen wir:

$$A_d := \{n + m\omega_d \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{wobei } \omega_d := \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\sqrt{d}) & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \text{ ex. mit } d = 4k+1 \\ \sqrt{d} & \text{sonst} \end{cases}$$

Zum Beispiel ist $A_{-1} = \mathbb{Z}[i]$ der Ring der Gauß'schen Zahlen. Zeigen Sie:

(a) A_d ist ein Teilring von $\mathbb{C}$.

(b) Bestimmen Sie die Einheiten in A_d für $d = -1, -2, -3, -5, -6, -7$.

(c) A_2 hat unendlich viele Einheiten.

Aufgabe 2. 3 + 3 Punkte

(a) Sei R ein euklidischer Ring und $a_1, \dots, a_n, c, d \in R$, so dass $c \mid a_1, \dots, c \mid a_n$ gelten und d ein größter gemeinsamer Teiler von $\frac{a_1}{c}, \dots, \frac{a_n}{c}$ ist. Beweisen Sie, dass cd ein größter gemeinsamer Teiler von $a_1, \dots, a_n$ ist.

(b) Bestimmen Sie mittels des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler von

$$f(x) = x^8 + 3x^7 + 3x^6 + 3x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

und

$$g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 3. 4 Punkte

Sei R ein Integritätsring, so dass $R[X]$ ein Hauptidealring ist. Zeigen Sie, dass dann R ein Körper ist.
(Hinweis: Für $a \in R$ betrachten Sie das Ideal $(a, X) \subseteq R[X]$.)

Abgabe bis Montag, den **30.05.16**, um 10:00 Uhr (s.t.) in das Postfach 15 auf D.13.
Wir bitten um Gruppenabgaben mit jeweils zwei Studenten!
Aktuelles und Übungsblätter unter `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~grensing/lehre.html`