

5. Übungsblatt zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1.

4 Punkte

Listen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 2016 auf.
Begründen Sie beispielhaft für zwei der angegebenen Gruppen, warum diese nicht isomorph sind.

Aufgabe 2.

4 Punkte

Sei G eine Gruppe und N, M Normalteiler von G mit $M \leq N$. Beweisen Sie:

$$G/N \simeq (G/M)/(N/M)$$

Aufgabe 3.

6 Punkte

Sei G eine Gruppe. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist $N \triangleleft G$, so gibt es ein $U \leq G$ mit $U \cong G/N$.
- (b) Ist $N \triangleleft G$ und sind N und G/N abelsch, so auch G .
- (c) Gilt $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$ und $G/H \cong G/K$, so sind H und K isomorph.
- (d) Ist n ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$, so enthält G eine Untergruppe der Ordnung n .
- (e) Gilt $U \triangleleft V \triangleleft G$, so auch $U \triangleleft G$.
- (f) Sind N, M Normalteiler von G mit $N \cong M$, so gilt $G/N \cong G/M$.

Aufgabe 4.

4 Punkte

Sei $q = p^k$ eine Primzahlpotenz, $\mathcal{K}$ der Körper mit q Elementen und G die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\text{GL}_3(\mathcal{K})$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Gruppe U der oberen Dreiecksmatrizen mit den Einsen auf der Diagonale eine normale p -Sylowgruppe von G bildet.
- (b) Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

Zusatzaufgabe

4 Punkte

Sei G eine Gruppe mit $|G| = 196$. Zeigen Sie, dass die Gruppe eine normale 7-Sylowgruppe P besitzt und eine Untergruppe von G isomorph zu G/P ist.

Hinweise zur Bewertung:

- Wir bitten um Gruppenabgaben mit jeweils zwei Studenten!
- Die Zusatzaufgabe ist wie der Name schon sagt eine zusätzliche Aufgabe. Ihre Bearbeitung ist freiwillig. Es gibt aber bei erfolgreicher Bearbeitung Bonuspunkte in der Gesamtbilanz. Wir wünschen Ihnen viel Spaß beim Lösen.