

2. Übungsblatt zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1.

2+2+2 Punkte

- a) Es sei Q_8 eine Menge mit 8 Elementen, die wir mit $\pm e, \pm i, \pm j, \pm k$ bezeichnen. Angenommen, man kann eine Verknüpfung $\cdot$ auf Q_8 definieren, so dass Q_8 eine Gruppe ist und folgende Regeln gelten:

- $+e$ ist das Einselement.
- Es gelte $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -e$
- Es gelten die üblichen Vorzeichenregeln, also z.B. $-(-i) = i$ und $j \cdot (-i) = -(j \cdot i)$

Zeigen Sie, dass damit die Verknüpfung $\cdot$ eindeutig bestimmt ist; bestimmen Sie explizit die Multiplikationstabelle, d. h. die Tabelle aller Produkte $g \cdot h$ mit $g, h \in Q_8$. Ist Q_8 abelsch?

- b) Betrachten Sie die folgende Teilmenge $Q(8) = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ von 2×2 -Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{C}$ mit

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $Q(8)$ schon eine Untergruppe (bezüglich der Matrixmultiplikation) von $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ ist und dass obige Regeln mit E, I, J, K anstelle von e, i, j, k gelten. Schließen Sie daraus, dass es die oben angenommene Verknüpfung gibt. (Diese Gruppe wird die Quaternionengruppe genannt; die Regeln gehen auf W. R. Hamilton im 19. Jahrhundert zurück.)

- c) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe Q_8 .

Aufgabe 2.

2+2 Punkte

Operiert eine Gruppe G auf einer Menge Ω , so nennen wir ein Element $x \in \Omega$ einen Fixpunkt von Ω (bezüglich der Operation von G), wenn die Operation von G ihn fix läßt, d.h. es gilt $g \cdot x = x$ für alle $g \in G$.

- (a) Zeigen Sie, dass eine 18-elementige Menge bezüglich einer beliebigen Operation einer Gruppe der Ordnung 55 mindestens zwei Fixpunkte besitzt.
- (b) Ist G eine p -Gruppe und operiert auf Ω mit $(|\Omega|, p) = 1$, so hat Ω einen Fixpunkt.

Aufgabe 3.

2+2 Punkte

Zu einer Gruppe G mit Normalteiler N betrachte man die Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \{U \mid N \leq U \leq G\}, & \bar{A} &:= \{V \mid V \leq G/N\} \\ B &:= \{U \mid N \leq U \triangleleft G\}, & \bar{B} &:= \{V \mid V \triangleleft G/N\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- (a) Der kanonische Epimorphismus $\nu: G \longrightarrow G/N$ induziert eine Bijektion $\Phi: A \longrightarrow \bar{A}, U \mapsto \nu(U)$.
- (b) Auch $\Phi|_B: B \longrightarrow \bar{B}$ ist bijektiv, d.h. Normalteiler entsprechen einander.

Aufgabe 4.

2+2+2+2 Punkte

Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der Konjugationsklassen der S_n .

- (a) Zeigen Sie, dass für ein festes $r \leq n$ die Menge aller r -Zykel eine Konjugationsklasse ist. Beschreiben Sie dann die Konjugationsklasse einer beliebigen Permutation $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$, wobei $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ die Zerlegung von σ in disjunkte Zyklen der Länge $r_1, \dots, r_k$ resp. ist.

- (b) Wir definieren die Menge $\mathcal{P}$ der aufsteigenden Partitionen von n durch

$$\mathcal{P} := \{(n_1, \dots, n_k) \mid k \leq n \text{ und } 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k \leq n \text{ und } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n\}$$

Zeigen Sie, dass $b: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}$ mit

$$(n_1, \dots, n_k) \mapsto \text{cc}_{S_n}((1, 2, \dots, n_1)(n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2) \dots (n_1 + \dots + n_{k-1} + 1, \dots, n))$$

eine Bijektion von $\mathcal{P}$ auf die Menge $\mathcal{K}$ der Konjugationsklassen von S_n ist.

- (c) Geben Sie die Konjugationsklassen der S_3 und der S_4 an.
- (d) Wie viele Elemente hat die Konjugationsklasse von $(1, 2, 3, 4)(5, 6, 7)(8, 9)$ in S_{10} ? Wie viele die von $(1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10)$ in S_{10} ?

[Hinweis zu 4.(a): Blatt 1, Aufgabe 1.(f)]

Abgabe bis Montag, den **25.04.16**, um 10:00 Uhr (s.t.) in das Postfach 15 auf D.13.

Gruppenabgaben für jeweils maximal zwei Studenten sind gestattet.

Aktuelles und Übungsblätter unter <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~grensing/lehre.html>