Prof. Späth
Dr. Grensing

SS 2016

11. Übungsblatt zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. 4 Punkte

Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ über $\mathbb{Q}$ und zeigen Sie:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{7})$$

Bestimmen Sie dazu $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 2. 4 Punkte

Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $i + \sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. 6 Punkte

Sei x transzendent über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie, dass $M := K(x)$ eine algebraische Erweiterung von $L := K(\frac{x^3}{x+1})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $[M : L] = 3$ gilt.
(Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $Y^3 - (Y+1)\frac{x^3}{x+1} \in K[\frac{x^3}{x+1}][Y]$; zeigen und nutzen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon K[Z] \longrightarrow K[\frac{x^3}{x+1}], Z \mapsto \frac{x^3}{x+1}$ ein Ringisomorphismus ist.)

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von x über L.

Aufgabe 4. 4 Punkte

Es sei K ein *algebraisch abgeschlossener* Körper, d. h. jedes nicht-konstante Polynom in $K[X]$ zerfällt über K in Linearfaktoren.
Beweisen Sie, dass K unendlich viele Elemente enthält.

Aktuelles und Übungsblätter zur Vorlesung finden Sie ab 1. Juli 2016
auf der Homepage von Dr. Bender:
`http://www2.math.uni-wuppertal.de/ bender/lehre.html`.

Hinweise zur Klausur: Die Klausur findet am Donnerstag, den 21. Juli 2016, von 10:00 Uhr bis 12:00 Uhr statt.
Wir bitten um eine Voranmeldung zur Klausur in der Vorlesung am 13. Juni oder nachträglich an Prof. Späth per E-Mail BSpaeth@uni-wuppertal.de.

Abgabe bis Montag, den **04.07.16**, um 10:00 Uhr (s.t.) in das Postfach 15 auf D.13.
Wir bitten um Gruppenabgaben mit jeweils zwei Studenten!