

10. Übungsblatt zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1.

3 Punkte

Bestimmen Sie die Charakteristiken der Ringe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^{2 \times 2}$ und $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{2 \times 2}$.

Aufgabe 2.

4 Punkte

Untersuchen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibilität.

- (a) $X^5 - 3X^3 - 2X^2 + X + 3 \in \mathbb{Z}_5[X]$.
- (b) $Y \cdot f + g \in K[X, Y]$, wobei K ein Körper und $f, g \in K[X]$ teilerfremd sind.
(Hinweis: Betrachten Sie den Y -Grad möglicher Teiler des gegebenen Polynoms.)
- (c) $7X^4 + (6 + 9i)X^3 + (17 + 6i)X^2 + (12i - 5)X + 1 + 8i \in \mathbb{Z}[i][X]$.
(Hinweis: Zeigen Sie mittels der Norm auf $\mathbb{Z}[i]$, dass das Element $2 + 3i$ prim ist in $\mathbb{Z}[i]$.
Anschließend wenden Sie das Kriterium von Eisenstein an.)
- (d) $Z^n + Y^2 + X^3 \in \mathbb{Z}[X, Y, Z], n \in \mathbb{N}$.
(Hinweis: Betrachten Sie dabei den Ring $\mathbb{Z}[X, Y][Z]$.)

Aufgabe 3.

2 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe des Irreduzibilitätskriteriums von Eisenstein (Satz 10.6), dass die Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt[10]{\frac{9}{7}}$ irrational sind.

Aufgabe 4.

4 Punkte

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt einen bijektiven Ringhomomorphismus $\varphi: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$ mit $\varphi(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ und $\varphi(X) = X + 1$.
- (b) In dem Quotientenkörper $\mathbb{Q}(X)$ von $\mathbb{Q}[X]$ gilt die folgende Identität:

$$f_p := X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1 = \frac{X^p - 1}{X - 1}$$

Berechnen Sie damit $\varphi(f_p)$. (Hinweis: Verwenden Sie Lemma 10.9.)

- (c) Das Polynom f_p ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 5

3 Punkte

Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad 4 in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

Zusatzaufgabe

4 Punkte

Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad 5 in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.
Welche ganzzahligen Polynome sind damit sicher irreduzibel?

Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur findet am Donnerstag, den 21. Juli 2016, von 10:00 Uhr bis 12:00 Uhr statt.
- Die Klausurzulassung wird nach der letzten Übung am 13. Juli 2016 festgestellt.
- Wir bitten um eine Voranmeldung zur Klausur in der Vorlesung am 13. Juni oder per E-Mail an grensing@uni-wuppertal.de.