Übungen zu Elementare Zahlentheorie

Blatt 12

Aufgabe 1. Aus der Vorlesung und von Blatt 11 kennen Sie für alle Primzahlen $p > 5$ die Werte:

$$\left(\frac{-1}{p}\right), \quad \left(\frac{1}{p}\right), \quad \left(\frac{2}{p}\right), \quad \left(\frac{3}{p}\right), \quad \left(\frac{5}{p}\right),$$

Zeigen Sie nun, dass für zwei von 2 verschiedene Primzahlen p und q sowie jedes $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:
Wenn $p \equiv q \pmod{4|a|}$ gilt, so folgt:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right).$$

Aufgabe 2.

Es sei p eine ungerade Primzahl.

a) Zeigen Sie:

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Wilson.

b) Das Produkt aller quadratischen Restklassen in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ sei mit R_p bezeichnet. Zeigen Sie:

$$R_p \equiv \begin{cases} -1 \pmod{p} & \text{falls } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ 1 \pmod{p} & \text{falls } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Aufgabe 3.

Es sei $a \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge (als Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) von $ax^2 + y^2 = z^2$ ähnlich wie im Fall $a = 1$ (pythagoräische Tripel).

Aufgabe 4.

a) Es sei (a, b, c) ein primitives pythagoräisches Tripel. Zeigen Sie:

$$c \equiv 1 \pmod{12} \quad \text{oder} \quad c \equiv 5 \pmod{12}$$

b) Bestimmen Sie die kleinsten natürliche Zahlen c mit $c \equiv 1 \pmod{12}$ oder $c \equiv 5 \pmod{12}$, die nicht als "Hypotenuse" in einem pythagoräischen Tripel (a, b, c) vorkommen können.