Übungen zu Elementare Zahlentheorie Blatt 11

Aufgabe 1.

- Bestimmen Sie die Legendre-Symbole $\left(\frac{3}{73}\right)$, $\left(\frac{17}{73}\right)$ und $\left(\frac{19}{73}\right)$.
- Bestimmen Sie die Legendre-Symbole $\left(\frac{313}{367}\right)$, $\left(\frac{367}{401}\right)$ und $\left(\frac{401}{313}\right)$.
- Berechnen Sie $\left(\frac{1}{23}\right) + \left(\frac{2}{23}\right) + \left(\frac{4}{23}\right) + \left(\frac{5}{23}\right)$.

Aufgabe 2.

- Es seien p eine ungerade Primzahl und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$ und $p \nmid b$. Zeigen Sie, dass genau dann $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ gilt, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a \equiv bk^2 \pmod{p}$.
- Es seien p eine Primzahl mit $p \equiv 3 \pmod{4}$ und $a \in \mathbb{Z}$ ein quadratischer Rest modulo p . Zeigen Sie, dass dann $a^{\frac{p+1}{4}}$ eine Lösung von $x^2 \equiv a \pmod{p}$ ist.
- Es seien p eine ungerade Primzahl und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$ und $p \nmid b$. Zeigen Sie, dass die Gleichheit

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{-b}{p}\right)$$

genau dann gilt, wenn ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ existieren mit $p \nmid x$ und $p \nmid y$ sowie

$$ax^2 + by^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie für eine beliebige Primzahl $p > 3$ das Legendre-Symbol $\left(\frac{3}{p}\right)$.

Tipp: Die Antwort hängt nur von der Restklasse von p modulo 12 ab.

Aufgabe 4.

Es sei p eine Primzahl mit $p > 5$. Zeigen Sie:

- In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ gilt:

$$\left[\left(\frac{5}{p}\right)\right]_5 = ([p]_5)^2.$$

Das heißt, es ist:

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [1]_5 = ([p]_5)^2 \\ -1 & \text{falls } [-1]_5 = ([p]_5)^2 \end{cases}.$$

- Es ist genau dann $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$, wenn $p \equiv 1 \pmod{5}$ oder $p \equiv -1 \pmod{5}$ gilt.

Es ist genau dann $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$, wenn $p \equiv 2 \pmod{5}$ oder $p \equiv 3 \pmod{5}$ gilt.