

Übungen zu Elementare Zahlentheorie

Blatt 9

Aufgabe 1.

- a) Es sei k in $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die k -te Fermat-Zahl $\mathbf{F}_k := 2^{2^k} + 1$ eine Primzahl oder eine 2-Pseudoprimzahl ist.
Tipp: Berechnen Sie zuerst die Restklasse von 2^{2^k} und damit dann die von 2^{F_k-1} in $\mathbb{Z}/F_k\mathbb{Z}$.
- b) Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die p -te Mersenne-Zahl $\mathbf{M}_p := 2^p - 1$ eine Primzahl oder eine 2-Pseudoprimzahl ist.

Aufgabe 2.

Welche der sieben 2-Pseudo-Primzahlen 341, 561, 645, 1105, 1387, 1729 und 1905 unterhalb von 2000 sind Carmichael-Zahlen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden vier linearen Kongruenzen:

$$\begin{aligned} 145x &\equiv 15 \pmod{120} \\ 24x &\equiv 15 \pmod{120} \\ 42x &\equiv 30 \pmod{18} \\ 6x &\equiv 47 \pmod{36} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.

- a) Bestimmen Sie eine ganze Zahl, die bei Division durch 10, 13 und 17 die Reste 3, 11 bzw. 15 lässt. (Regiomontanus, 1436 - 1473)
- b) Aus einem chinesischen Rechenbuch: Eine Bande von 17 Räubern stahl einen Sack mit Goldstücken. Als sie ihre Beute in gleiche Teile teilen wollten, blieben 3 Goldstücke übrig. Beim Streit darüber, wer ein Goldstück mehr erhalten sollte, wurde ein Räuber erschlagen. Jetzt blieben bei der Verteilung 10 Goldstücke übrig. Erneut kam es zum Streit, und wieder verlor ein Räuber sein Leben. Jetzt ließ sich endlich die Beute gleichmäßig verteilen. Wie viele Goldstücke waren mindestens im Sack?
- c) Sinngemäß aus einem indischen Rechenbuch (Mahaviracarya, um 850 n. Chr.):
Aus Früchten werden 63 gleich große Haufen gelegt, 7 Stück bleiben übrig. Es kommen 23 Reisende, unter denen die Früchte gleichmäßig verteilt werden, so dass keine Frucht übrig bleibt. Wie viele Früchte waren es?