Übungen zu Elementare Zahlentheorie

Blatt 8

Aufgabe 1.

Es bezeichne F_n die n -te Fibonacci-Zahl. Zeigen Sie, dass jede Primzahl p entweder F_{p+1} oder F_{p-1} teilt.
Tipp: Verwenden Sie die Formel von Binet.

Aufgabe 2.

- a) Welche Periodenlänge in der Dezimalbruchentwicklung hat die Zahl $\frac{1}{323}$?
- b) Gibt es eine Primzahl p , so dass die Periodenlänge in der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{p}$ gerade 8 ist? Wieviele Primzahlen p gibt es mit dieser Eigenschaft?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ und Ziffern $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, so dass für die Zahl α mit der periodischen Dezimalbruchentwicklung $0, \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ gilt:

$$a_0 \cdot \alpha = 0, \overline{a_0 a_n a_{n-1} \dots a_1}$$

Aufgabe 4.

- a) Beweisen Sie die folgende Umkehrung des Satzes von Wilson (Aufgabe 4 auf Blatt 7):

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$, für die $(n-1)! \equiv (-1) \pmod{n}$ gilt, ist eine Primzahl.

- b) Es sei p eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl und $w_1, \dots, w_s$ seien alle primitiven Restklassen in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\prod_{k=1}^s w_k \equiv 1 \pmod{p}.$$