

Übungen zu Elementare Zahlentheorie

Blatt 7

Aufgabe 1.

- a) Wie viele primitive Restklassen gibt es jeweils in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{Z}/73\mathbb{Z}$?
- b) Bestimmen Sie die Ordnungen der primen Restklassen in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ und geben Sie die primitiven Restklassen an.

Aufgabe 2.

Es sei $p > 2$ eine Primzahl und $[r]_p$ eine primitive Restklasse in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- a) Beweisen Sie, dass im Fall $p \equiv 1 \pmod{4}$ auch $[-r]_p$ primitiv ist.
- b) Zeigen Sie, dass im Fall $p \equiv 3 \pmod{4}$ die Ordnung von $[-r]_p$ gerade $\frac{p-1}{2}$ ist.

Aufgabe 3.

- a) Finden Sie drei natürliche Zahlen m , für die $[3]_m$ eine primitive Restklasse in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist.
- b) Finden Sie drei Primzahlen p , für die $[3]_p$ eine primitive Restklasse in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.
- c) Was besagt die Vermutung von Emil Artin (1898-1962) über primitive Restklassen? Wie weit ist diese Vermutung bewiesen oder widerlegt?
Finden Sie dazu selbstständig eine Quelle (Lehrbuch, Artikel, Internet) und geben diese an. Achten Sie auf eine konsistente und mit der Vorlesung kompatible Wiedergabe.

Aufgabe 4. Es sei $p > 2$ eine Primzahl und $[r]_p$ eine primitive Restklasse in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Beweisen Sie die folgende Kongruenz:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Tipp: Zeigen Sie zuerst die Kongruenz $(p-1)! \equiv r^{1+2+\dots+(p-1)} \pmod{p}$.