Übungen zu Elementare Zahlentheorie Blatt 5

Aufgabe 1.

Sind die Zahlen 1573, 1728, 2013, 6710 und 10012 durch 3, 7, 9 bzw. 11 teilbar? Begründen Sie Ihre Antwort mit den in der Vorlesung vorgestellten Teilbarkeitskriterien.

Aufgabe 2.

Es seien $a, b, m \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$. Finden Sie für die folgenden Aussagen entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

- Gilt $a \equiv b \pmod{m}$, so gilt auch $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$.
- Durch die Vorschrift $[c]_m \mapsto [c^k]_m$ für alle $[c]_m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ wird eine Abbildung von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ definiert.
- Gilt $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, so gilt $a \equiv b \pmod{m}$ oder $a \equiv -b \pmod{m}$.
- Gilt $a \equiv b \pmod{m}$, so gilt auch $a^2 \equiv b^2 \pmod{m^2}$.

Aufgabe 3.

Es sei $n \in \mathbb{Z}$ und die Dezimaldarstellung von $n^2 + n + 3$ gegeben durch $a_l a_{l-1} \dots a_0$. Zeigen Sie, dass a_0 in $\{3, 5, 9\}$ liegt.

Tipp: Bestimmen Sie diejenigen Restklassen $y \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, für die es eine Restklasse $x \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ gibt mit $y = x^2 + x + [3]_{10}$.

Aufgabe 4.

- Beweisen Sie den kleinen Satz von Fermat: Für jede natürliche Zahl n und jede Primzahl p gilt:

$$p \mid n^p - n$$

Tipp: Führen Sie eine Induktion nach n durch oder verwenden Sie die Eigenschaften von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- Es sei n eine natürliche Zahl, die bei der Division mit 4 den Rest 2 läßt. Zeigen Sie, dass sich n nicht als die Differenz von zwei Quadratzahlen schreiben läßt.