Übungen zu Elementare Zahlentheorie

Blatt 4

Aufgabe 1. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$. Zeigen Sie, dass keine natürlichen Zahlen $k > 1$ und m existieren mit $n! = m^k$. (Tipp: Verwenden Sie das Bertrandsche Postulat.)

Aufgabe 2. Es sei die Folge $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induktiv definiert durch $L_1 := 1$, $L_2 := 3$ und $L_{n+2} := L_n + L_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner bezeichne $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Zeigen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

- $F_k + F_{k+2} = L_{k+1}$
- $2F_{k+n} = F_k \cdot L_n + F_n \cdot L_k$
- $L_k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$
- $F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

Aufgabe 3. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $R_k := \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ den in der Vorlesung am 6. Mai 13 eingeführten Restklassenring der ganzen Zahlen modulo k .

- Wie viele Elemente hat R_6 ? Geben Sie die Verknüpfungstafel für die Addition in R_6 an.
- Bestimmen Sie jeweils die Verknüpfungstafel für die Multiplikation in den Restklassenringen R_3 und R_6 und R_9 und geben Sie jeweils die Menge der multiplikativ invertierbaren Elemente an.
- Wie lässt sich allgemein für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die Menge der multiplikativ invertierbaren Elemente von R_k charakterisieren?

Aufgabe 4. Hier können Sie noch einmal die Detailrechnungen zum Beweis der Formel von Binet, welche für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine explizite Darstellung der Fibonacci-Zahlen F_n gibt, nachvollziehen. Zur Erinnerung:

Mit $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ gilt nach der Formel von Binet: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.

- Zeigen Sie die folgenden Gleichheiten von 2×2 -Matrizen reeller Zahlen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\psi & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 1 \\ -\psi & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & 1 \\ -\psi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\psi & -\varphi \end{pmatrix}$$

Geben Sie nun die zu $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\psi & -\varphi \end{pmatrix}$ inverse Matrix S^{-1} an.

- Verifizieren Sie (mit Hilfe geeigneter Eigenvektoren zu den zwei Eigenwerten φ und ψ von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie geeigneter Basiswechselformen) die Gleichheit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} S^{-1}$$

c) Berechnen Sie explizit das Produkt $S \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix} S^{-1}$, vergleichen Sie das Ergebnis mit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ und leiten die Formel von Binet her.

(Tipp: Nutzen Sie die Gleichheiten $\psi\varphi = \varphi\psi = -1$ und $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 = \psi^2 - \psi - 1$.)