Prof. Dr. M. Reineke
Dr. A.-L. Grensing
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe und Besprechung
in den Übungen
der Woche 29.4.13 - 3.5.13

Übungen zu Elementare Zahlentheorie
Blatt 2

Aufgabe 1. Geben Sie den Goldbachschen Beweis (um 1730) für die Unendlichkeit der Primzahlmenge wieder.
Finden Sie dazu selbstständig eine Quelle (Lehrbuch, Artikel, Internet) und geben diese an. Achten Sie auf eine konsistente und mit der Vorlesung kompatible Beweisführung.

Aufgabe 2. a) Berechnen Sie jeweils die 2-adische, die 3-adische und die 5-adische Zifferndarstellung von 17.

b) Berechnen Sie jeweils den Exponenten von $2, 3$ und 5 in der kanonischen Primfaktorzerlegung von $17!$.

c) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ und $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k}$.

d) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \leq n$ eine Primzahl. Berechnen Sie für jede natürliche Zahl $k > \frac{\log n}{\log p}$ die größte ganze Zahl x mit $x \leq \frac{n}{p^k}$.

Aufgabe 3. a) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler $a := \mathrm{ggT}(2013, 171)$ von 2013 und 171 mit dem euklidischen Algorithmus und geben Sie zwei verschiedene Vielfachsummendarstellungen von a an, d.h. finden Sie $(u, v) \neq (u', v')$ mit $2013u + 171v = a = 2013u' + 171v'$.

b) Was ist der größte gemeinsame Teiler von $2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 24$ und $3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 25$?

c) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_r, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass genau dann $s_1, s_2, \ldots, s_r \in \mathbb{Z}$ existieren mit $n = \sum_{i=1}^{r} s_i \cdot a_i$, wenn $\mathrm{ggT}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ ein Teiler von n ist.

Aufgabe 4. a) Berechnen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(2013, 171)$ von 2013 und 171 sowie $\mathrm{kgV}(2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 24\,,\, 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 25)$.

b) Beweisen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{kgV}(\mathrm{ggT}(a, b)\,,\, c) = \mathrm{ggT}(\mathrm{kgV}(a, c)\,,\, \mathrm{kgV}(b, c))$$