Übungen zu Elementare Zahlentheorie

Blatt 1

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- a) $3 \mid n^3 + 2n$
- b) $23 \mid 852^n - 1$
- c) $42 \mid (n+1)^7 - n - 1$
- d) $27 \mid 2^{5n+1} + 5^{n+2}$

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ definiert als das Produkt $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Weiter ist für jede natürliche Zahl $k \leq n$ der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gegeben durch:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- a) Beweisen Sie die Rekursionsformel: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$
- b) Zeigen Sie, dass das Produkt von n aufeinander folgenden natürlichen Zahlen durch $n!$ teilbar ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für jede ungerade Primzahl n gilt:

$$\text{a) } n^2 \mid \sum_{i=1}^n i^n \qquad \text{b) } n^3 \nmid \sum_{i=1}^n i^n$$

Tipp: Betrachten Sie die Summe über $(i^n + (n-i)^n)$.
Übrigens gilt a) allgemeiner für jede ungerade natürliche Zahl n .

- Aufgabe 4.**
- a) Jede sechsstellige Zahl der Form $abcabc$ (also z.B. 496496) ist durch 7, durch 11 und durch 13 teilbar.
 - b) Zeigen Sie, dass eine natürliche Zahl mit 10 verschiedenen Primfaktoren und insgesamt 20 Primfaktoren mindestens 6144 Teiler besitzt.
 - c) Bestimmen Sie alle Vielfachen von 12 mit genau zwei verschiedenen Primteilern und genau 14 Teilern.