# Übungen zum Vorkurs

## 1 Aufgaben:

**Afg. 1 :** In der Ebene seien zwei Strecken $a$ und $b$ gegeben, sowie eine Strecke $c$ der Länge 1. Alle drei Strecken dürfen an beliebigen Punkten angelegt werden (ohne dass dafür ein Konstruktionsverfahren angegeben werden muss). Konstruieren Sie dann allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal (also ohne Geo-Dreieck) die Größen $\frac{2}{3}a$, $a \cdot b$ und $\sqrt{a}$.

**Afg. 2 :** Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $c$ und Katheten $a$ und $b$. Ist die folgende Aussage wahr? „Die Summe der Flächen der Halbkreise über $a$ und $b$ stimmt mit der Fläche des Halbkreises über $c$ überein.“

**Afg. 3 :** Herr Baselitz erwirbt ein viereckiges Grundstück. Die Seitenlängen betragen 8 und 15 Meter, gegenüberliegende Seiten sind gleich lang. Herr Baselitz misst auch noch die Länge der Diagonale und erhält als Ergebnis 17 Meter. Ist das Grundstück rechtwinklig?

**Afg. 4 :** Zeigen Sie, dass es keine rationale Zahl $x$ mit $x^2 = 5$ gibt.

**Afg. 5 :** Bestimmen Sie alle Elemente und alle Teilmengen von

$$\begin{aligned} A &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \\ B &= \{p \in \mathbb{Z} : (p > 1) \text{ und } (p \text{ Primzahl}) \text{ und } (p \text{ ist Teiler von } 210)\}. \end{aligned}$$

**Afg. 6 :** Sind die folgenden Aussagen wahr?

a) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$, b) $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$,
c) $3 \in \{3\}$, d) $3 \subset \{3\}$, e) $\varnothing \subset \{1\}$, f) $\varnothing \in \{1\}$.

**Afg. 7 :** Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn 9 Teiler von 27 ist, dann ist auch 3 Teiler von 27.
b) Es gibt mehr als 2 Studenten, die vor der Tür rauchen.
c) Alle Professoren haben weiße Haare und einen Bart.
d) In Wuppertal regnet es oder alle Ampeln sind rot.

**Afg. 8:** Geben Sie Zusammensetzungen aus $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ an, die folgende Bedeutungen haben:

„entweder $A$ oder $B$“, bzw. „weder $A$ noch $B$“.

**Afg. 9:** Zeigen Sie: Die Aussage „$\big(A \wedge (A \implies B)\big) \implies B$“ ist immer wahr.

**Afg. 10:** Beweisen Sie die logischen Äquivalenzen:

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \iff A \vee B \quad \text{und} \quad \neg(\neg A \vee \neg B) \iff A \wedge B$$

**Afg. 11:** Welche der folgenden Äquivalenzen ist falsch? Und warum?

$$\begin{aligned} 7x = 10x - 3 &\iff 7x - 7 = 10x - 10 \\ &\iff 7(x-1) = 10(x-1) \\ &\iff 7 = 10. \end{aligned}$$

**Afg. 12:** Sind die folgenden Aussagen wahr? Formulieren Sie ihre Negationen!

a) $\forall\, x \in \{3,5,7,9\} \,:\, x + 3 \geq 7$
b) $\forall\, x \in \{3,5,7,9\} \,:\, x$ ist ungerade.
c) $\forall\, x \in \{3,5,7,9\} \,:\, x$ ist prim.
d) $\exists\, x \in \{1,2,3,4\} \,:\, 2x^2 + x = 15$.

**Afg. 13:** Zeigen Sie: $\exists\, n \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, m \geq n \,:\, \dfrac{1}{m} < \dfrac{17}{22}$.

**Afg. 14:** Beim Umgang mit Datenbanken wird gerne die Abfragesprache SQL benutzt. Eine typische Abfrage könnte so aussehen:

SELECT *Kennzahl, Name, Kostenstelle, Beruf*
  FROM *PersDat*
 WHERE
   *Kostenstelle*=1300
   AND *Beruf* = „Informatiker“
   OR *Beruf* = „DV-Kaufmann“.

Aus einer Datenbank mit dem Namen „PersDat“ , in der die Datensätze u.a. die Datenfelder „Kennzahl“, „Name“, „Kostenstelle“ und „Beruf“ enthalten, sollen alle Angestellten auf der Kostenstelle 1300 herausgesucht werden, die Informatiker oder DV-Kaufmann sind. Die Ausgabe könnte z.B. folgendermaßen aussehen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | Schmitt | 1300 | DV-Kaufmann |
| 890 | Meier | 1300 | DV-Kaufmann |
| 720 | Schulze | 1300 | Informatiker |

Die Reihenfolge der Auswertung der logischen Operatoren NOT, AND, OR wird durch eine Prioritätsliste gesteuert, kann aber auch durch das Setzen von Klammern festgelegt werden.

Stellen Sie sich jetzt vor, Sie hätten Zugriff auf eine Datenbank „Stud“, bei der jeder Datensatz wie folgt aufgebaut ist:

| Matr.-Nr. | Name | Geschlecht | Imm.-Jahr | Fach | Leistungspunkte |
|---|---|---|---|---|---|

Formulieren Sie eine SQL-Abfrage, mit der alle Studentinnen in den Fächern Mathematik und Informatik herausgesucht werden, die seit spätestens 2010 immatrikuliert sind und inzwischen entweder mindestens 150 Leistungspunkte oder weniger als 18 Leistungspunkte erworben haben.

**Afg. 15 :** In der Vorlesung wurde ein axiomatisches „Baumschulen“-Modell vorgestellt:

- Jeder Baum gehört zu wenigstens einer Reihe, und zu jeder Reihe gehört ein Baum.
- Zwei verschiedene Bäume gehören zu genau einer gemeinsamen Reihe.
- Jede Reihe ist zu genau einer anderen Reihe disjunkt.

Es wurde Satz 1 bewiesen: „Jeder Baum gehört zu mindestens zwei Reihen.“

Beweisen Sie im Rahmen dieses Modells Satz 2: „Jede Reihe enthält wenigstens 2 Bäume.“

**Afg. 16 :**

Sei $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ und $C = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 3\}$. Berechnen Sie $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$ und $B \cup C$.

**Afg. 17 :** Zeigen Sie:

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B) \quad \text{und} \quad P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B).$$

Warum gilt im 2. Fall nicht die Gleichheit?

**Afg. 18 :** Zeigen Sie:

a) $(-1) \cdot (-1) = 1$.
b) Ist $a \cdot b = 0$, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.
c) Bestimmen Sie alle Elemente von $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+3} = x + 1\}$.

**Afg. 19 :** Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Ist $n > m > 0$, so ist $\dfrac{m+1}{n+1} > \dfrac{m}{n}$.

**Afg. 20 :** Beweisen Sie durch Fallunterscheidung:
Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $n^2 + 3n + 7$ ungerade.

**Afg. 21 :** Beweisen Sie durch Widerspruch:
Ist $x$ rational und $y$ irrational, so ist $x + y$ irrational.

**Afg. 22 :** Beweisen Sie durch Kontraposition:
Ist $x > 0$ irrational, so ist auch $\sqrt{x}$ irrational.

**Afg. 23 :** Berechnen Sie die folgenden Summen:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{3} \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right), \quad S_2 = \sum_{i=2}^{100} (2i+3) \quad \text{und} \quad S_3 = \sum_{i=3}^{10} (2i-3) - 2 \sum_{i=1}^{8} i.$$

**Afg. 24 :** Beweisen Sie die Summenformel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
(ohne Induktion!)

**Afg. 25 :** Beweisen Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \big( 2n^3 + 3n^2 + n \big)$.

**Afg. 26 :**

a) Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$ in $\mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{(n-3)!}{(n-4)(n-3)} < 5000$.

**Afg. 27 :** Berechnen Sie den Quotienten $\dbinom{n}{k} \Big/ \dbinom{n-1}{k-1}$.

**Afg. 28 :** Berechnen Sie die folgenden Summen:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\,, \qquad \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\,,$$
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}2^{i}\,, \qquad \sum_{i=0}^{n}(\sqrt[n]{2}-1)^{i}\binom{n}{i}.$$

**Afg. 29:** Beweisen Sie die Formel

$$\sum_{i=1}^{n} i\,q^{i} = \frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{(q-1)^{2}}\,.$$

**Afg. 30:** Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind induktiv?

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}, \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 2n\}, \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{R} : x(x+4) > 0 \text{ und } x+3 > 0\}, \\ M_4 &= \{x \in \mathbb{R} : 2x \in \mathbb{Z} \text{ und } 10x > -7\}. \end{aligned}$$

**Afg. 31:** Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

- $1 \in M$.
- Ist $n \in \mathbb{N}$ und gilt $m \in M$ für alle $m < n$, so ist auch $n \in M$.

Zeigen Sie, dass $M = \mathbb{N}$ ist (verallgemeinertes Induktions-Prinzip).

**Afg. 32:**

a) Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Formel, dass $2n+1 < 2^n$ für $n \geq 3$ gilt.

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $n^2 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$.

**Afg. 33:** Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}\,n(n+1)(n+2)$.

**Afg. 34:** Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $T_n$ die Menge aller Teiler von $n$. Sind $a, b \in \mathbb{N}$ so enthält $T_a \cap T_b$ mindestens die Zahl 1, ist also nicht leer. Das größte Element von $T_a \cap T_b$ nennt man den ***größten gemeinsamen Teiler*** von $a$ und $b$ und bezeichnet es mit $\mathrm{ggT}(a,b)$. Ist $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$, so nennt man $a$ und $b$ ***teilerfremd***.

Sind $a, b \in \mathbb{N}$, $b \leq a$, so gibt es nach dem Satz von der Division mit Rest natürliche Zahlen $q$ und $r$ mit $0 \leq r < b$, so dass $a = q \cdot b + r$ ist. Man zeige: Ist $r$ ein Teiler von $b$, so ist $r = \mathrm{ggT}(a, b)$.

**Afg. 35 :** Aus der vorigen Aufgabe ergibt sich, dass man den größten gemeinsamen Teiler von $a$ und $b$ ermitteln kann, indem man sukzessive so lange mit Rest dividiert, bis die Division aufgeht (euklidischer Algorithmus). Und dabei sieht man, dass es immer ganze (eventuell auch negative) Zahlen $x$ und $y$ gibt, so dass die folgende Gleichung gilt:

$$\mathrm{ggT}(a, b) = x \cdot a + y \cdot b.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man zeigen: Ist $p$ eine Primzahl, die ein Produkt $ab$ teilt, so muss $p$ schon mindestens einen der beiden Faktoren $a$ oder $b$ teilen.

**Afg. 36 :** Man beweise den „Fundamentalsatz der Arithmetik“:

Jede natürliche Zahl $n$ kann in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden: $n = p_1 p_2 \cdots p_k$. Dabei sind die Faktoren bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

(Beim Beweis können die Ergebnisse der vorigen Aufgaben und natürlich auch das verallgemeinerte Induktions-Prinzip verwendet werden).

**Afg. 37 :** Zeigen Sie: $3 | (n^3 + 2n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Afg. 38 :** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $30 | (n^5 - n)$.

**Afg. 39 :** Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf $\mathbb{Z}$. Sind sie reflexiv, symmetrisch oder transitiv?

1. $m \sim n \;:\Longleftrightarrow\; m \geq n$.
2. $m \sim n \;:\Longleftrightarrow\; m = 2n$.
3. $m \sim n \;:\Longleftrightarrow\; m \cdot n \geq -1$.

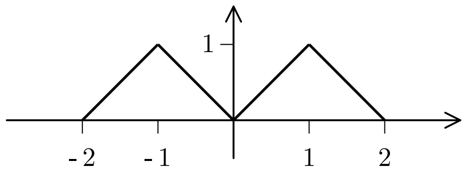
**Afg. 40 :** Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann gilt für Teilmengen $M_1, M_2 \subset A$ und $N_1, N_2 \subset B$ :

1. $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$.
2. $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$.

Gelten diese Aussagen auch für „$\cap$“?

**Afg. 41 :** a) Skizzieren Sie die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \max(|x|,|y|) = 1\}$.

b) Definieren Sie eine Funktion $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, deren Graph wie folgt aussieht:




**Afg. 42 :** Sei $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x}}$ und $g(y) := 16y^4$. Geben Sie die Definitionsbereiche an und berechnen Sie – wenn möglich – die Verknüpfungen $f \circ g$ und $g \circ f$.

**Afg. 43 :** Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 2x - 3 & \text{falls } x \leq 0, \\ 7x & \text{falls } x > 0. \end{cases} \quad \text{und } g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \leq -2, \\ 2x - 1 & \text{falls } x > -2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

**Afg. 44 :** Zeigen Sie für eine Abbildung $f : M \to N$:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, A \subset M \,:\, f^{-1}(f(A)) = A \\ f \text{ surjektiv} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, B \subset N \,:\, f(f^{-1}(B)) = B. \end{aligned}$$

**Afg. 45 :** Suchen Sie Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

- $f$ ist **nicht** surjektiv.
- $g$ ist **nicht** injektiv.
- Es ist $g \circ f = \mathrm{id}$.

**Afg. 46 :** Gegeben seien zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist $f$ injektiv und $g$ surjektiv.

**Afg. 47 :** a) Man konstruiere eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $g(0,0) = 0$.

b) Mit Hilfe von (a) und der Dezimalbruch-Darstellung der reellen Zahlen konstruiere man eine injektive Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

**Afg. 48 :** Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv bzw. surjektiv sind:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3 - 27$.

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \begin{cases} (2x+3)/(1-x) & \text{für } x \neq 1 \\ -2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $h(x,y) := (x^2 - y, x - 1)$.

**Afg. 49:** Sei $I := (-1,1) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 1\}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \dfrac{x}{1-x^2}$. Zeigen Sie, dass $f$ bijektiv ist.

**Afg. 50:** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 2x - 1 & \text{falls } x \leq 2, \\ x + 1 & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f$ bijektiv ist, und bestimmen Sie $f^{-1}$.

**Afg. 51:** Sei $x_n := (n-2)/(n+1)$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie zu $\varepsilon := 1/100$ ein $n_0$, so dass $|x_n - 1| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ ist.

**Afg. 52:** Ist $a_n$ eine konvergente Folge, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.

**Afg. 53:** Sei $x_n := \dfrac{1 - n + n^2}{n(n+1)}$. Zeigen Sie, dass die Folge $x_n$ nach oben beschränkt und monoton wachsend ist. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

**Afg. 54:** a) Die Zahlen $a_n$ seien alle positiv. Zeigen Sie: Konvergiert $a_n$ gegen $a$, so ist $a \geq 0$, und die Folge $\sqrt{a_n}$ konvergiert gegen $\sqrt{a}$.

b) Untersuchen Sie die Folge $x_n := \sqrt{n^2 + n} - n$ auf Konvergenz!

**Afg. 55:** a) Seien $a_n$, $b_n$ und $c_n$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$. Konvergiert $a_n$ gegen $a$ und $c_n$ gegen $a$, so konvergiert auch $b_n$ gegen $a$.

b) Sei $a_n := \big(1 - \dfrac{1}{n^2}\big)^n$. Zeigen Sie, dass $a_n$ gegen 1 konvergiert.

**Afg. 56:** Sei $0 \leq q < 1$ und $a_n$ eine Folge. Ist $|a_{n+1}/a_n| \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $a_n$ gegen Null.

**Afg. 57:** Eine quadratische Funktion ist in ***Normalform*** gegeben, wenn sie in der Form

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

gegeben ist. Interpretieren Sie die Größen $a$, $x_s$ und $y_s$. Bringen Sie die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ in die Normalform. Ist $f$ auf $[-3, 3]$ injektiv?

**Afg. 58:** Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie: $c \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Nullstelle von $f(x)$, wenn es ein Polynom $g(x)$ vom Grad $n - 1$ gibt, so dass $f(x) = (x - c) \cdot g(x)$ ist.

**Afg. 59:** Dividieren Sie mit Rest:

$$\begin{aligned}(3x^5 - x^4 + 8x^2 - 1) &\ :\ (x^3 + x^2 + x) \ = \ ??\\ (x^4 + 5x^2 - 3) &\ :\ (x^3 - 3x^2 + 4) \ = \ ??\end{aligned}$$

**Afg. 60:** Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so dass $\sqrt{2}$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist.

**Afg. 61:** Geben Sie ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten an, das die Zahl $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ als Nullstelle besitzt.

**Afg. 62:** Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck mit den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und den gegenüberliegenden Seiten $a$, $b$ und $c$.

Beweisen Sie die Formel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

**Afg. 63:** Anhand des Einheitskreises verifiziere man die Formeln

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) = \cos\alpha &\quad \text{und} \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\\ \cos(\alpha + \pi/2) = -\sin\alpha &\quad \text{und} \quad \sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha,\\ \text{sowie} \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha &\quad \text{und} \quad \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha. \end{aligned}$$

**Afg. 64:** Sei $p$ eine Primzahl. Man sagt, zwei ganze Zahlen $n, m$ heißen ***kongruent modulo p*** (in Zeichen: $n \equiv m \bmod p$), falls gilt: $p|(n - m)$.

Zeigen Sie: Ist $a \equiv a' \bmod p$ und $b \equiv b' \bmod p$, so ist $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \bmod p$.

**Afg. 65:** Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{Z}$ und $n \not\equiv 0 \bmod p$, so gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $n \cdot m \equiv 1 \bmod p$.

(Hinweis: Man benutze die Tatsache, dass der größte gemeinsame Teiler $d$ zweier Zahlen $a, b$ in der Form $d = xa + yb$ geschrieben werden kann).

**Afg. 66 :** Zeigen Sie: Durch

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von $(2, 2)$.

**Afg. 67 :** Sei $\sim_0$ eine Relation auf einer Menge $A$, die reflexiv und transitiv ist. Zeigen Sie: Durch

$$x \sim y \;:\iff\; (x \sim_0 y) \wedge (y \sim_0 x)$$

wird auf $A$ eine Äquivalenzrelation definiert.

**Afg. 68 :** Auf $\mathbb{Z}$ werde folgende Relation definiert:

$$m \sim n \;:\iff\; m \cdot n > 0 \text{ oder } m = n = 0.$$

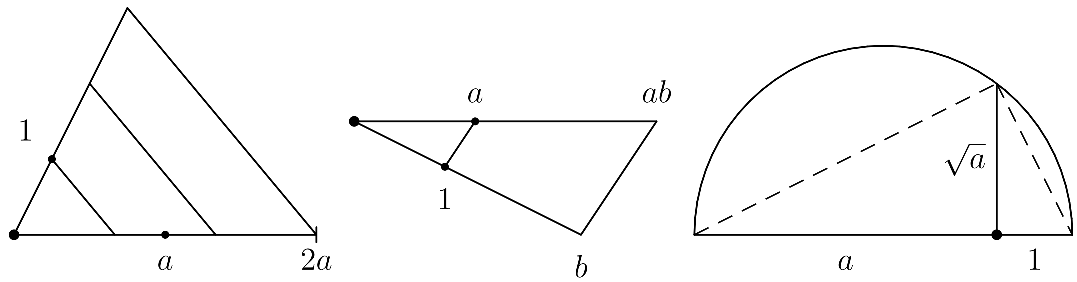
Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen.

**Afg. 69 :** Mit $|A|$ sei die Mächtigkeit der Menge $A$ bezeichnet. Zeigen Sie:

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

# 2 Lösungshinweise

**Zu Afg. 1.**




**Zu Afg. 2.** Die Fläche des Halbkreises über der Strecke $x$ beträgt $(x/2)^2\pi = x^2\pi/4$. Die Aussage ist also wahr.

**Zu Afg. 3.** Das Grundstück setzt sich aus zwei kongruenten Dreiecken zusammen (SSS-Kongruenz). Weil $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$ ist, folgt aus der Umkehrung des Satzes von Pythagoras, dass beide Dreiecke rechtwinklig sind. Weil die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind, kommt ein Rechteck heraus.

**Zu Afg. 4.** Annahme, $\exists\, x = p/q$ (gekürzter Bruch) mit $p^2/q^2 = 5$. Dann ist $p^2 = 5q^2$, und 5 muss auch ein Teiler von $p$ sein: $p = 5x$, also $q^2 = 5x^2$. Das zeigt, dass 5 auch ein Teiler von $q$ ist. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $p$ und $q$ teilerfremd sind.

**Zu Afg.5.** $A$ hat 2 Elemente und 4 Teilmengen. $B = \{2, 3, 5, 7\}$ hat 16 Teilmengen.

**Zu Afg. 6.** a) w, b) w, c) w, d) f, e) w, f) f.

**Zu Afg. 7.** Verwende die Aussagen in folgender Struktur:
a) $A \implies B$ (besser in der Form $B \vee \neg A$)
c) $\forall\, x\, :\, A(x) \wedge B(x)$
d) $A \vee B$.

Bei (b) ist es etwas komplizierter, eventuell kann man es so ausdrücken:
„Die Anzahl der Elemente der Menge aller Studenten, die …, ist > 2.“

**Zu Afg. 8.** $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$ bzw. $(\neg A) \wedge (\neg B)$

**Zu Afg. 9.**

| $A$ | $B$ | $A \implies B$ | $A \wedge (A \implies B)$ | $\big(A \wedge (A \implies B)\big) \implies B$ |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w |
| f | w | w | f | w |
| f | f | w | f | w |

**Zu Afg. 10.** Wahrheitstafeln

**Zu Afg. 11.** Division durch $x - 1$ geht nicht.

**Zu Afg. 12.** a) f, b) w, c) f, d) f. Der Rest ist einfach, z.B. bei (c): „ $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\}$ mit: $x$ nicht prim“.

**Zu Afg. 13.** Man ermittelt $n$ durch Umformung. Der exakte Beweis wird dann umgekehrt geführt:

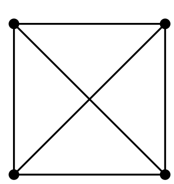
Sei $n = 3$. Ist $m \geq n$ beliebig vorgegeben, so ist $m \geq 3$, also $m > 2$ und $17m > 34 > 22$. Daraus folgt: $m > 22/17$, also $1/m < 17/22$.

**Zu Afg. 14.**
SELECT *Matr.-Nr., Name, Fach, Leistungspunkte*
FROM *Stud*
WHERE
Geschlecht=„w“
AND
$\big($(Fach=„Mathematik“) OR (Fach=„Informatik“)$\big)$
AND
(Imm.-Jahr $\leq$ 2010)
AND
$\big($(LP $\geq$ 150) OR (LP $<$ 18)$\big)$

**Zu Afg. 15.**
Beweis für Satz 2:

Sei eine Reihe $A$ gegeben und $t \in A$ gewählt.
$\exists$ Reihe $B \neq A$ mit $t \in B$ (nach Satz 1)
$\exists$ genau eine Reihe $C$ mit $C \cap B = \varnothing$ (nach Axiom)
$\Longrightarrow t \notin C$
Annahme: $A$ enthält nur $t$.
$\Longrightarrow A \cap C = \varnothing$.
$\exists$ genau eine Reihe $D$ mit $D \cap C = \varnothing$ (nach Axiom)
$\Longrightarrow D = B$ und $D = A$.
$\Longrightarrow A = B$. Widerspruch!
Also Annahme falsch, Satz bewiesen.

**Anmerkung:** Hier ist ein minimales Modell für das Axiomensystem:



Die Punkte sind die Bäume, die Verbindungsstrecken die Reihen.

**Zu Afg. 16.** $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 5\}$ und $A \cup B = \mathbb{R}$,
$A \cap C = \varnothing$ und $A \cup C = \{x \in \mathbb{R} : (-\sqrt{3} < x < -1) \vee (1 < x < \sqrt{3}) \vee (x \geq 2)\}$,
$B \cap C = C$ und $B \cup C = B$ (weil $C \subset B$).

**Zu Afg. 17.** Der Beweis der Formeln ist einfach. Die zweite folgt z.B. so:

Sei $X \in P(A) \cup P(B)$ ein beliebig vorgegebenes Element. Dann gilt:
$\big(X \in P(A)\big) \vee \big(X \in P(B)\big)$, also $(X \subset A) \vee (X \subset B)$.

Ist nun $x \in X$, so liegt $x$ in $A$ oder in $B$, also in $A \cup B$. Das bedeutet, dass $X \subset A \cup B$ ist, also $X \in P(A \cup B)$. Da $X$ beliebig vorgegeben war, ist die Formel damit bewiesen.

**Behauptung:** In der Aussage „$P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$“ kann man „$\subset$“ nicht durch ein Gleichheitszeichen ersetzen.

Der Beweis dieser Behauptung sollte schriftlich formuliert werden. Nach einigen Vorüberlegungen folgt weiter unten hinter „Beweis“ eine „Musterlösung“.

**(1) Überlegungen:**

Die Gleichheit der Mengen $P(A) \cup P(B)$ und $P(A \cup B)$ würde bedeuten, dass „$\subset$“ und „$\supset$“ gilt. Da „$\subset$“ oben gezeigt wurde und „$=$“ widerlegt werden soll, bleibt nur zu zeigen, dass „$\supset$“ im allgemeinen nicht gilt. Diese Beziehung darf in manchen Fällen durchaus gelten, es reicht, ein einziges Gegenbeispiel zu finden.

**(2) Überlegungen:**

Wie findet man ein Gegenbeispiel? Bei den Mengen $A$ und $B$ hat man jetzt die freie Wahl! Und dann muss man dazu passend noch eine Menge $X$ finden, so dass gilt: $X \subset A \cup B$, aber $\big(X \not\subset A\big) \wedge \big(X \not\subset B\big)$. Das ist nicht so schwer. Die Menge $X$ sollte Elemente aus $A \setminus B$ und Elemente aus $B \setminus A$ enthalten. Dann liegt sie in $A \cup B$, aber in keiner der beiden einzelnen Mengen allein.

Diese Vorüberlegungen sollten reichen, um ein Gegenbeispiel aufzuschreiben (natürlich kann man unzählige andere Beispiele finden, aber eins reicht ja).

Beweis (Gegenbeispiel):

Sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{3, 4, 5, 6\}$. Die Menge $X := \{2, 4, 6\}$ ist Teilmenge von $A \cup B$, also Element von $P(A \cup B)$. Aber $X$ ist weder Element von $P(A)$, noch von $P(B)$, also auch kein Element von $P(A) \cup P(B)$.

*(Ein noch einfacheres Gegenbeispiel erhält man mit $A := \{1\}$, $B := \{2\}$ und $X := A \cup B$.)*

**Zu Afg. 18.**

a) Es ist $(-1)+(-1)(-1) = (-1)\cdot(1+(-1)) = (-1)\cdot 0 = 0$ und $(-1)+1 = 0$. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit von Gleichungen (siehe Skript) folgt die Behauptung.

b) Sei $a \cdot b = 0$. Ist $a = 0$, so ist man fertig. Ist $a \neq 0$, so existiert $a^{-1}$, und es ist $0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$.

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} = x+1 \quad &\Longrightarrow \quad x+3 = (x+1)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 1 \text{ oder } x = -2. \end{aligned}$$

Da man die erste Implikation nicht umkehren kann, muss man die möglichen Werte probeweise einsetzen und erhält so schließlich

$$\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+3} = x+1\} = \{1\}.$$

**Zu Afg. 19.** Um auf die richtige Idee zu kommen, forme man die gewünschte Ungleichung erst mal um (indem man über Kreuz multipliziert). Dann aber sollte die richtige Schlussrichtung verwendet werden:

$$n > m \implies nm + n > nm + m \implies n(m+1) > m(n+1) \implies \frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}.$$

**Zu Afg. 20.**

Die beiden Fälle sind „$n$ gerade" (also $n = 2k$) und „$n$ ungerade" (also $n = 2k+1$).

**Zu Afg. 21.** Sei $x = p/q$ rational und $y$ irrational. Annahme $x + y = r/s$ rational. Dann ist $y = r/s - p/q = (rq - sp)/(sq)$ ebenfalls rational. Das ist ein Widerspruch.

*(Genau genommen ist das eher ein Beweis durch Kontraposition).*

**Zu Afg. 22.** Ist $\sqrt{x}$ rational, so ist offensichtlich auch $x$ rational.

**Zu Afg. 23.**

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - 1/4 = 3/4, \\ S_2 &= 2\sum_{i=1}^{100} i + 3\sum_{i=1}^{100} 1 - (2 \cdot 1 + 3) \;=\; 2 \cdot 5050 + 3 \cdot 100 - 5 \;=\; 10395, \\ S_3 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{10} i - 30 - 0 - 2\sum_{i=1}^{8} i \;=\; 110 - 30 - 72 \;=\; 8. \end{aligned}$$

**Zu Afg. 24.** Das ist eine Telekop-Summe, deshalb braucht man keine Induktion.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

**Zu Afg. 25.** Da noch keine Induktion zur Verfügung steht, sollte man es ohne schaffen. Trick: Man berechne $S := \sum_{k=1}^{n}\Big((k+1)^3 - k^3\Big)$ auf zweierlei Weisen.

1. Möglichkeit (Wechselsumme): $S = (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n$.

2. Möglichkeit (Aufspaltung der Summe):

$$S = \sum_{k=1}^{n}\big(3k^2 + 3k + 1\big) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}\big(S - n\big) - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{6}\Big[2n^3 + 6n^2 + 6n - 2n - 3n^2 - 3n\Big] \\
&= \frac{1}{6}\Big[2n^3 + 3n^2 + n\Big] \;=\; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.
\end{aligned}$$

**Zu Afg. 26.** a) Die Gleichung reduziert sich auf die quadratische Gleichung $n^2 + n - 30 = 0$ mit den Lösungen $n = -6$ und $n = 5$. Nur die zweite Lösung liegt in $\mathbb{N}$.

b) Hier ergibt sich die Ungleichung $(n-5)! < 5000$. Es ist $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$. Also muss $0 \le n - 5 \le 6$ sein, d.h. $n \in \{5, 6, 7, 8, \ldots, 11\}$.

**Zu Afg. 27.** Der Quotient ergibt den Wert $n/k$.

**Zu Afg. 28.**

$$S_1 = \big(1 + (-1)\big)^n = 0 \quad \text{und} \quad S_2 = \big((-1) + 1\big)^n - 1 = -1,$$

$$S_3 = \big((-2) + 1\big)^n = (-1)^n \quad \text{und} \quad S_4 = \big((\sqrt[n]{2} - 1) + 1\big)^n = 2.$$

**Zu Afg. 29.** Es ist

$$(q-1)^2 \sum_{i=1}^{n} i\,q^i = \sum_{i=1}^{n} i\,q^{i+2} - 2\sum_{i=1}^{n} i\,q^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} i\,q^i = nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q.$$

**Zu Afg. 30.** $M_1$ ist induktiv. $M_2$ enthält nicht die 1. $M_3 = \{x : x > 0\}$ ist induktiv und $M_4 = \{-0.5,\ 0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ \ldots\}$ ist induktiv.

**Zu Afg. 31.** Die Aussage $M = \mathbb{N}$ kann durch das Widerspruchsprinzip bewiesen werden:

Wir nehmen an, dass $M \neq \mathbb{N}$ ist. Dann gibt es ein kleinstes $n$ in $\mathbb{N} \setminus M$. Ist $m \in \mathbb{N}$ und $m < n$, so liegt $m$ in $M$, nach Definition von $n$. Aber dann gehört $n$ ebenfalls zu $M$, nach Definition von $M$. Das ist ein Widerspruch.

**Zu Afg. 32.** a) $2^n = (1+1)^n = 1^n + n \cdot 1^{n-1} + \cdots + n \cdot 1 + 1 > 2n + 1$.

b) Induktionsanfang: $5^2 = 25$ und $2^5 = 32 > 5^2$. Der Induktions-Schluss bietet kein Problem.

**Zu Afg. 33.** Sehr einfacher Induktionsbeweis.

**Zu Afg. 34.** Ist $a = qb + r$, so ist $T_a \cap T_b \subset T_r \cap T_b$ und $T_r \cap T_b \subset T_a \cap T_b$, also $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, r)$. Geht die Division auf, so ist $\mathrm{ggT}(a, b) = r$.

Wenn die Division nicht aufgeht, wiederholt man den Vorgang (jetzt $b = q_1 r + r_1$ usw.). Der letzte Rest, der auftritt, bevor eine Division aufgeht, ist der $\mathrm{ggT}(a, b)$. Man bezeichnet das Verfahren als euklidischen Algorithmus.

Beim ersten Schritt ist $r = 1 \cdot a + (-q) \cdot b$, beim zweiten ist $r_1 = b - q_1 r = (-q_1)a + (1 + q_1 q)b$, und so geht es weiter. Am Ende erhält man immer eine Darstellung $\mathrm{ggT}(a, b) = xa + yb$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$.

**Zu Afg. 35.** Sei $p$ prim, mit $p|(ab)$. Gilt $p|a$, ist man fertig. Wenn $p \not| a$, dann ist $\mathrm{ggT}(p, a) = 1$. Also $\exists\, x, y$ mit $1 = ax + py$. $\implies b = abx + pby$.

Weil $p|(ab)$ und $p|(pby)$, teilt $p$ auch $b$. Das war zu zeigen.

**Zu Afg. 36.** Induktion nach $n$ (verallgemeinertes Induktions-Prinzip):

1 ist das „leere“ Produkt, also ein Produkt von 0 Primzahlen.

Sei nun $n > 1$ und der Satz für alle $m < n$ schon bewiesen. Ist $n$ prim, so ist die Zerlegung schon gegeben. Ist $n$ nicht prim, so gibt es eine Zerlegung $n = ab$ mit natürlichen Zahlen $a, b < n$. Nach Induktionsvoraussetzung kann man $a$ und $b$ in Primfaktoren zerlegen, und damit auch $n = ab$.

Zur Eindeutigkeit: Ist $p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_s$, so muss jedes $p_i$ eins der $q_j$ teilen (und daher $p_i = q_j$ sein), und umgekehrt.

**Zu Afg. 37.** Induktion nach $n$.

**Zu Afg. 38.** $n^5 - n$ ist offensichtlich immer durch 2 teilbar. Außerdem ist $n^5 - n = n(n^4 - 1)$ durch 3 und durch 5 teilbar:

a) Ist $n$ durch 3 bzw. 5 teilbar, so ist nichts mehr zu zeigen.

b) Ist $p$ prim und $1 \le k \le p - 1$, so ist $(qp + k)^4 - 1 = pm + (k^4 - 1)$, mit einer Zahl $m \in \mathbb{N}$. Nun ist $k^4 - 1 = 0,\ 15,\ 80,\ 255$ für $k = 1, 2, 3, 4$. Alle diese Zahlen sind durch 5 teilbar, und zumindest 0 und 15 sind auch durch 3 teilbar.

Also ist $n^5 - n$ durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbar.

**Zu Afg. 39.** 1) reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch.
2) nicht reflexiv, nicht smmetrisch, nicht transitiv.
3) reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv.

**Zu Afg. 40.**

1) $y \in f(M_1 \cup M_2) \iff y = f(x)$ mit $(x \in M_1) \vee (x \in M_2) \iff \ldots$

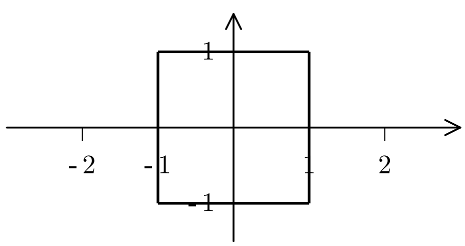
2) $x \in f^{-1}(N_1 \cup N_2) \iff \big(f(x) \in N_1\big) \vee \big(f(x) \in N_2\big) \iff \ldots$

Es gilt auch $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$.

Weiter gilt $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$, aber nicht die Umkehrung! Gegenbeispiel: $M_1 = [0,1]$, $M_2 = [-1,0]$ und $f(x) := x^2$. Dann ist

$$f(M_1) \cap f(M_2) = [0,1] \quad \text{und} \quad f(M_1 \cap M_2) = \{0\}.$$

**Zu Afg. 41.** a) Die Menge $\{(x,y) \,:\, \max(|x|,|y|) = 1\}$ hat die Gestalt




b)

$$f(x) := \begin{cases} x+2 & -2 \le x < -1 \\ -x & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ 2-x & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

**Zu Afg. 42.** $f$ ist für $x \ge 0$ definiert, und $g$ für alle $y$. Also ist $f \circ g$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und $g \circ f$ auf $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \ge 0\}$.

Es ist $f \circ g(y) = 8|y|^3$ und $g \circ f(x) = 16x^3$.

**Zu Afg. 43.** Es ist

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (2x-3)^2 & \text{für } x \le 0, \\ 14x - 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{und } f \circ g(x) = \begin{cases} 7x^2 & \text{für } x \le -2, \\ 4x - 5 & \text{für } -2 < x \le 1/2, \\ 14x - 7 & \text{für } x > 1/2. \end{cases}$$

**Zu Afg. 44.** Die Aufgabe sollte schriftlich bearbeitet werden, deshalb wird die Lösung hier besonders ausführlich besprochen:

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

**Behauptung:** $f$ injektiv $\iff \forall A \subset M : f^{-1}(f(A)) = A$.

Beweis: Zunächst ist zu bemerken, dass immer $A \subset f^{-1}(f(A))$ ist, unabhängig davon, ob $f$ injektiv ist oder nicht, denn:

Ist $x \in A$, dann liegt natürlich $f(x)$ in $f(A)$ und deshalb $x$ in $f^{-1}(f(A))$.

a) Sei nun $f$ injektiv und $x \in f^{-1}(f(A))$. Dann ist $f(x) \in f(A)$. Es gibt also ein $x' \in A$ mit $f(x) = f(x')$. Wegen der Injektivität ist dann $x = x'$, also $x \in A$. Damit ist $f^{-1}(f(A)) \subset A$, und weil die Inklusion in umgekehrter Richtung sowieso gilt, erhält man die Gleichheit.

b) Ist umgekehrt das Kriterium erfüllt und $f(x) = f(x')$. Dann ist $x \in f^{-1}(f(\{x'\}))$, also $x \in \{x'\}$, d.h. $x = x'$. Das bedeutet, dass $f$ injektiv ist. ∎

**Behauptung:** $f$ surjektiv $\iff \forall B \subset N : f(f^{-1}(B)) = B$.

Beweis: Hier ist festzuhalten, dass immer $f(f^{-1}(B)) \subset B$ gilt. Denn wenn $y$ in $f(f^{-1}(B))$ liegt, dann gibt es ein $x \in f^{-1}(B)$ mit $f(x) = y$. Und das bedeutet, dass $y$ sogar in $B$ liegt.

a) Sei $f$ surjektiv und $y \in B$. Dann gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Damit liegt $x$ in $f^{-1}(B)$ und $y = f(x)$ in $f(f^{-1}(B))$. Also ist $B \subset f(f^{-1}(B))$, und wegen der Vorbemerkung gilt sogar die Gleichheit.

b) Ist das Kriterium erfüllt und $y \in N$, so ist $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$. Es gibt also ein $x \in f^{-1}(\{y\})$ mit $f(x) = y$. Das bedeutet, dass $f$ surjektiv ist. ∎

Der Beweis ist sehr formal, und es ist schwer, eine Beweis-Idee darzustellen. Im Grunde läuft der Beweis fast von alleine, wenn man alle vorkommenden Begriffe verstanden und geistig gegenwärtig hat. Jeder neue Schritt besteht darin, das Ergebnis des vorangehenden Schrittes zu interpretieren oder umzuformen. Beispiel: Ist $f$ injektiv, so muss man zeigen:

$$\forall x : x \in f^{-1}(f(A)) \implies x \in A.$$

1. Schritt: Sei $x \in f^{-1}(f(A))$ (beliebig) vorgegeben.

2. Schritt: Weil generell $f^{-1}(Y) = \{x : f(x) \in Y\}$ ist, folgt speziell: $f(x) \in f(A)$.

3. Schritt: Weil $f(A) = \{f(x') : x' \in A\}$ ist, folgt: $\exists x' \in A$ mit $f(x) = f(x')$.

4. Schritt: Weil $f$ injektiv ist, folgt aus der Gleichung $f(x) = f(x')$, dass $x = x'$ ist.

5. Schritt: Weil $x = x'$ und $x' \in A$ ist, ist $x \in A$, und man ist – ziemlich überraschend – am Ziel. Man kann diesen Beweis führen, ohne bei jedem Schritt noch den Überblick über das Gesamtproblem behalten zu müssen.

**Zu Afg. 45.** Sei $f(n) := 2n + 1$. Dann ist $f$ nicht surjektiv. Außerdem sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(n) := \begin{cases} (n-1)/2 & \text{falls } n \geq 3 \text{ und ungerade,} \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$

$g$ ist nicht injektiv, weil z.B. $g(3) = 1 = g(1)$ ist. Und schließlich ist $g \circ f(n) = g(2n+1) = n$.

**Zu Afg. 46.** Sei $g \circ f$ bijektiv.

a) Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so ist $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, also

$$x_1 = (g \circ f)^{-1}(g \circ f(x_1)) = (g \circ f)^{-1}(g \circ f(x_2)) = x_2.$$

b) Sei $z \in C$. Dann gibt es ein $x \in A$ mit $g \circ f(x) = z$. Aber dann liegt $y := f(x)$ in $B$, und es ist $g(y) = z$.

**Zu Afg. 47.** a) Sei $h_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ definiert durch $h_0(0) := 0$, $h_0(n) := 2n - 1$ (für $n > 0$) und $h_0(-n) := 2n$ (für $n > 0$). Das ist eine bijektive Abbildung, und dann ist auch $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $h(n) := h_0(n) + 1$ bijektiv.

Ist $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Cantor'sche Diagonal-Abbildung (analog zur Diagonal-Methode bei der Abzählung von $\mathbb{Q}$), mit $d(1,1) = 1$, $d(1,2) = 2$, $d(2,1) = 3$, $d(3,1) = 4$, $d(2,2) = 5$ usw., so ist auch diese Abbildung bijektiv. Man setze $g(n,m) := h^{-1} \circ d(h(n), h(m))$.

b) Schreibt man reelle Zahlen als unendliche Dezimalbrüche, so kann man $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$f\big(x^*.x_0x_1x_2\ldots,\ y^*.y_0y_1y_2\ldots\big) := g(x^*, y^*).x_0y_0x_1y_1x_2y_2\ldots\ .$$

Da durch das Bild $f(x,y)$ alle Dezimalziffern von $x$ und $y$ festgelegt werden, ist $f$ injektiv.

**Zu Afg.48.** 1) $f$ ist injektiv und surjektiv:

a) Ist $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$, so ist $x_1 = x_2$ und $x_1^2 - y_1 = x_2^2 - y_2$, also auch $y_1 = y_2$.

b) Sei $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Setzt man $x := v + 1$ und $y := (v+1)^2 - u$, so ist $f(x,y) = (u,v)$.

2) Der Ausdruck $(2x+3)/(1-x)$ ist für alle $x \neq 1$ erklärt, die Definitionslücke wird durch die Vorschrift $1 \mapsto -2$ gefüllt. Die Auflösung der Gleichung $g(x) = y$ führt einen zu der Funktion

$$x = k(y) = \begin{cases} (y-3)/(2+y) & \text{für } y \neq -2, \\ 1 & \text{für } y = -2 \end{cases}$$

Weil $g \circ k = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $k \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist, folgt, dass $g$ bijektiv und $k = g^{-1}$ ist.

3) Ist $h(x_1,y_1) = h(x_2,y_2)$, so ist $x_1 - 1 = x_2 - 1$, also $x_1 = x_2$. Weil außerdem $x_1^2 - y_1 = x_2^2 - y_2$ ist, folgt auch $y_1 = y_2$. Also ist $h$ injektiv.

Ist $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, so setze man $x := v + 1$ und $y := (v+1)^2 - u$. Dann ist $h(x,y) = (u,v)$. Also ist $h$ surjektiv.

**Zu Afg. 49.** a) Ist $f(x) = f(y)$, so ist $x - y = xy(y - x)$. Dann ist entweder $x = y$ oder $xy = -1$. Da $|x| < 1$ ist, würde im letzteren Fall die Ungleichung $|y| > 1$ herauskommen. Das ist aber nicht möglich.

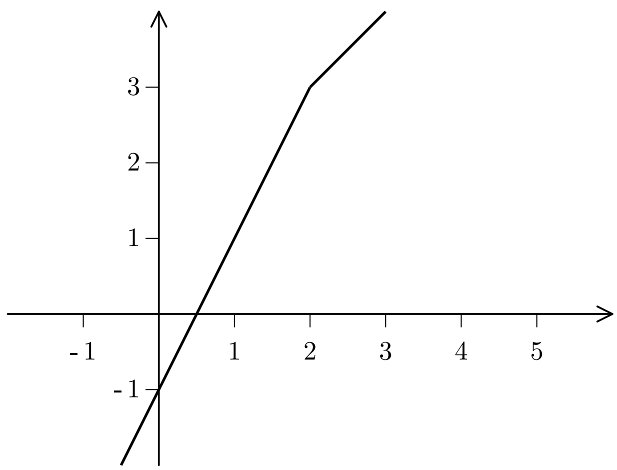
b) Es ist $f(0) = 0$ und $f(-x) = -f(x)$. Ist $x > 0$, so ist auch $f(x) > 0$. Es genügt daher zu zeigen, dass $f : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ bijektiv ist. Sei $z > 0$. Man setze

$$x := \frac{-1 + \sqrt{1 + 4z^2}}{2z}\,.$$

$$\text{Dann ist} \quad x^2 = \frac{1 + 2z^2 - \sqrt{1 + 4z^2}}{2z^2} \quad \text{und} \quad 1 - x^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4z^2}}{2z^2}\,,$$

also $f(x) = x/(1 - x^2) = z$.

**Zu Afg. 50.** Eine Zeichnung ist hilfreich:




Die Funktion $f_1 : \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} \to \{y \in \mathbb{R} : y \leq 3\}$ mit $f_1(x) = 2x - 1$ ist bijektiv (mit Umkehrabbildung $y \mapsto (y+1)/2$), und auch die Funktion $f_2 : \{x \in \mathbb{R} : x > 2\} \to \{y \in \mathbb{R} : y > 3\}$ ist bijektiv (mit Umkehrabbildung $y \mapsto y - 1$). Daraus ergibt sich die Bijektivität von $f$ und die Umkehrabbildung $f^{-1}$.

**Zu Afg. 51.** Es ist $|x_n - 1| = \left| \dfrac{n-2}{n+1} - \dfrac{n+1}{n+1} \right| = \dfrac{3}{n+1}$. Man probiert dann mal aus: $3/(n+1) < \varepsilon \iff n + 1 > 3/\varepsilon \iff n > (3/\varepsilon) - 1 = 300 - 1 = 299$.

Ist nun $\varepsilon := 1/100$ vorgegeben, $n_0 > 299$ und $n \geq n_0$, so ist $n + 1 \geq n_0 + 1 > 300$ und $|x_n - 1| = 3/(n+1) < 3/300 = \varepsilon$

**Zu Afg. 52.** Was bedeutet die Aussage in der Aufgabenstellung?

Der Grenzwert einer konvergenten Folge $a_n$ ist eine Zahl $a$, die durch folgende Eigenschaft festgelegt wird:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0, \text{ so dass } \forall\, n \geq n_0 \text{ gilt: } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Es ist nicht selbstverständlich, dass $a$ durch diese Eigenschaft eindeutig festgelegt wird (Wenn einem der Autovermieter sagt: „Ihr Wagen steht im hinteren Bereich des Parkplatzes, ist schwarz mit blauen Sitzen und besitzt eine Anhängerkupplung“, dann ist nicht sicher, dass es nur einen Wagen gibt, auf den diese Beschreibung passt).

Es ist also zu zeigen, dass es keine zwei verschiedenen Zahlen gibt, auf die die Charakterisierung des Grenzwertes von $a_n$ zutrifft. Dabei kann man folgendermaßen vorgehen:

Die Zahlen $a, b$ seien beide Grenzwert der Folge $a_n$. Beweisidee: Man untersucht den Abstand zwischen $a$ und $b$. Dazu sei ein (beliebig kleines) $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es Zahlen $n_0$ und $m_0$, so dass für $n \geq n_0$ bzw. $m \geq m_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad |a_m - b| < \varepsilon/2.$$

Ist nun $k_0 := \max(n_0, m_0)$, so gilt natürlich für $k \geq k_0$, dass $|a_k - a| < \varepsilon/2$ und $|a_k - b| < \varepsilon/2$ ist. Dann ist

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |b - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das gilt für **jedes** $\varepsilon > 0$. Wäre $a \neq b$, so wäre $|a - b| > 0$, also auch $\varepsilon := |a - b|/2 > 0$. Dann ist $|a - b| > \varepsilon$, im Widerspruch zur obigen Aussage.

**Zu Afg. 53.** Es ist

$$x_n = \frac{n^2 + n}{n(n+1)} - \frac{2n - 1}{n(n+1)} = 1 - \frac{2n - 1}{n(n+1)} \leq 1.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left[1 - \frac{2(n+1) - 1}{(n+1)(n+2)}\right] - \left[1 - \frac{2n - 1}{n(n+1)}\right] \\ &= \frac{(2n-1)(n+2) - n(2n+1)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2n^2 + 3n - 2 - 2n^2 - n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)(n+2)} \geq 0. \end{aligned}$$

Diese Erkenntnisse helfen allerdings nicht bei der Bestimmung des Grenzwertes. Den bekommt man mit Hilfe der „Grenzwertsätze“: Es ist

$$x_n = \frac{1 - n + n^2}{n^2 + n} = \frac{1/n^2 - 1/n + 1}{1 + 1/n},$$

und dieser Ausdruck strebt für $n \to \infty$ gegen 1.

**Zu Afg. 54.** a) Wenn $a = 0$ ist, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0$, so dass $0 < a_n < \varepsilon^2$ für $n \geq n_0$ ist. Statt $\varepsilon$ wurde hier gleich $\varepsilon^2$ benutzt, das ist ein kleiner, aber nicht wichtiger Trick. Dann ist $0 < \sqrt{a_n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert $\sqrt{a_n}$ gegen $0 = \sqrt{a}$.

Ist $a \neq 0$, so kann man abschätzen:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}},$$

und die rechte Seite strebt gegen Null. Man kann jetzt mit $\varepsilon$ und $n_0$ arbeiten.

b) Es ist

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{n^2+n} - n = \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite strebt offensichtlich gegen 1/2. Das gilt dann auch für $x_n$.

**Zu Afg. 55.** a) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n_0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |c_n - a| < \varepsilon.$$

Dann ist $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, also $|b_n - a| < \varepsilon$.

b) Es ist kein Zufall, dass der „Einschließungssatz“ in (a) bewiesen werden soll. Er soll natürlich in (b) verwendet werden. Also geht es hier jetzt darum, die Folge $a_n$ mit zwei Folgen von oben und unten einzuschließen, die man leichter behandeln kann. Eine große Hilfe dabei ist die Tatsache, dass der Grenzwert 1 in der Aufgabenstellung schon vorgegeben wird.

Die Abschätzung nach oben ist leicht: Es ist $1 - 1/n^2 < 1$ und deshalb auch $a_n = (1 - 1/n^2)^n < 1$.

Die Abschätzung nach unten liegt nicht so auf der Hand. Hier kann man sich einen Trick für's Leben merken: Bei Ausdrücken der Gestalt $(1 \pm x)^n$ hilft oft die Bernoulli'sche Ungleichung! Tatsächlich ist

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Die konstante Folge 1 konvergiert gegen 1, die Folge $1 - 1/n$ konvergiert auch gegen 1. Da $a_n$ dazwischen liegt, muss auch $a_n$ gegen 1 konvergieren.

Bemerkung: Die Folge $(1 + 1/n)^n$ konvergiert nicht gegen 1, sondern gegen die irrationale Zahl $e$.

**Zu Afg. 56.** Aus der Voraussetzung folgt die Ungleichung $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$. Das sagt einem noch nicht viel, aber man kann die Aussage iterieren:

$$|a_2| \leq q|a_1|, \quad |a_3| \leq q^2|a_1|, \quad |a_4| \leq q^3|a_1|, \quad \ldots$$

Mit einem simplen Induktionsbeweis folgt allgemein, dass $|a_n| \leq q^{n-1}|a_1|$ ist. Weil $0 \leq q < 1$ ist, strebt $q^n$ (und damit auch $q^{n-1}$) gegen Null. Daraus folgt, dass $a_n$ gegen Null konvergiert.

**Zu Afg. 57.** $f$ beschreibt eine Parabel. Ist $a > 0$, so ist sie nach oben geöffnet. Ist $a < 0$, so ist die Parabel nach unten geöffnet. Darüber hinaus besitzt die Parabel einen „Scheitelpunkt“ $(x_s, y_s)$. Dort erreicht die Parabel ihren kleinsten bzw. größten Wert.

Speziell ist

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 2.$$

**Zu Afg. 58.** Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ mit $a_n \neq 0$. Nach der 3. binomischen Formel ist $x^k - c^k = (x-c) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} x^j c^{k-1-j}$ Es ist

$$\begin{aligned} f(c) = 0 \quad \iff \quad f(x) &= f(x) - f(c) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i c^i \\ \iff \quad f(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i (x^i - c^i) = (x-c) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j c^{i-1-j} \\ \iff \quad f(x) &= (x-c) \cdot \big(a_1 + a_2(x+c) + \cdots + \\ & \quad a_n(c^{n-1} + xc^{n-2} + \cdots + x^{n-1})\big) = (x-c) \cdot g(x), \end{aligned}$$

wobei $g(x)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

**Zu Afg. 59.** Es ist

$$(3x^5 - x^4 + 8x^2 - 1) : (x^3 + x^2 + x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad \text{Rest} \quad 11x^2 - x - 1$$

und

$$(x^4 + 5x^2 - 3) : (x^3 - 3x^2 + 4) = x + 3 \quad \text{Rest} \quad 14x^2 - 4x - 15.$$

**Zu Afg. 60.** Man kann's ja mal mit der 3. binomischen Formel versuchen:

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2.$$

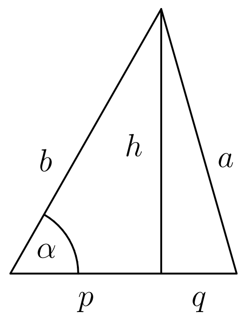
Das ist ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, und es hat $\sqrt{2}$ als Nullstelle.

**Zu Afg. 61.** Hier ist es etwas komplizierter. Sei $a := \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.
Dann ist $\big(a - \sqrt{2}\big)^3 = 2$, also

$$\begin{aligned} & a^3 - 3a^2\sqrt{2} + 6a - 2\sqrt{2} = 2 \\ \iff \quad & a^3 + 6a - 2 = \sqrt{2}\,(2 + 3a^2) \\ \implies \quad & (a^3 + 6a - 2)^2 = 2(2 + 3a^2)^2 \\ \iff \quad & a^6 - 6a^4 - 4a^3 + 12a^2 - 24a - 4 = 0. \end{aligned}$$

Also ist $a$ Nullstelle von $p(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4$.

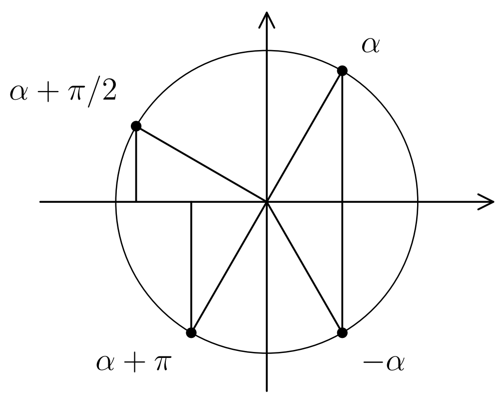
**Zu Afg. 62.**




Es ist $p + q = c$, $p^2 + h^2 = b^2$ und $q^2 + h^2 = a^2$, sowie $p/b = \cos\alpha$. Daraus folgt:

$$a^2 = h^2 + (c-p)^2 = b^2 - p^2 + c^2 - 2cp + p^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\alpha.$$

**Zu Afg. 63.**




**Zu Afg. 64.** Man zeigt leicht, dass die Kongruenz modulo $p$ eine Äquivalenzrelation ist.

Ist $a \equiv a' \bmod p$ und $b \equiv b' \bmod p$, so gibt es ganze Zahlen $x, y$, so dass $a - a' = xp$ und $b - b' = yp$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} ab - a'b' &= ab - ab' + ab' - a'b' \quad (0 = ab' - ab' \text{ addieren!}) \\ &= a(b-b') + (a-a')b' = p(ay + xb'), \end{aligned}$$

also $ab \equiv a'b' \bmod p$.

Der Sinn dieser Aufgabe: Man kann Kongruenzklassen miteinander „multiplizieren“ (weil das Ergebnis der Multiplikation von Repräsentanten unabhängig von eben diesen Repräsentanten ist). Ist etwa $p = 3$, so kann man eine Multiplikationstabelle für Kongruenzklassen aufstellen:

| | [0] | [1] | [2] |
|---|---|---|---|
| [0] | [0] | [0] | [0] |
| [1] | [0] | [1] | [2] |
| [2] | [0] | [2] | [1] |

**Zu Afg. 65.** Die Aufgabe bedeutet: Ist $[n] \neq [0]$, so gibt es eine Klasse $[m]$ mit $[n] \cdot [m] = [1]$. Man kann also auch durch Kongruenzklassen dividieren.

Wenn $n \not\equiv 0 \bmod p$ ist, also $p$ kein Teiler von $n$, dann ist $\mathrm{ggT}(n,p) = 1$. Nach Aufgabe 53 gibt es deshalb ganze Zahlen $x$ und $y$ mit $x \cdot n + y \cdot p = 1$. Das bedeutet, dass $p$ ein Teiler von $xn - 1$ ist, also $xn \equiv 1 \bmod p$.

**Zu Afg. 66.** Die Äquivalenz-Eigenschaft ist leicht zu sehen. Die Äquivalenzklasse von $(2,2)$ ist die Menge aller $(x,y)$ mit $x^2 + y^2 = 8$. Das ist der Kreis um $(0,0)$ mit Radius $2\sqrt{2}$.

Die abstrakte Eigenschaft, die durch die Äquivalenzrelation definiert wird, ist in diesem Falle der Abstand vom Nullpunkt.

**Zu Afg. 67.** $\sim$ ist reflexiv, weil $\sim_0$ reflexiv ist. Die Symmetrie ist offensichtlich.

Sei nun $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann ist $x \sim_0 y$, $y \sim_0 x$, $y \sim_0 z$ und $z \sim_0 y$. Weil $\sim_0$ transitiv ist, folgt: $x \sim_0 z$ und $z \sim_0 x$, also $x \sim z$.

**Zu Afg. 68.** a) Ist $n \in \mathbb{Z}$, so ist entweder $n = 0$ oder $n^2 > 0$. Also ist $\sim$ reflexiv.

b) Die Symmetrie von $\sim$ ist offensichtlich.

c) Ist $m \sim n$ und $n \sim k$, so muss man Fälle unterscheiden:

| | $n \cdot k > 0$ | $n = k = 0$ |
|---|---|---|
| $m \cdot n > 0$ | $m \cdot k > 0$ | unmöglich |
| $m = n = 0$ | unmöglich | $m = k = 0$ |

Also ist auch $m \sim k$. Die Relation ist transitiv.

Die Äquivalenzklassen sind die Mengen $\{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}$, $\{0\}$ und $\{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$.

**Zu Afg. 69.** Man verwende die disjunkten Zerlegungen $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ und $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

Ist $X \cap Y = \varnothing$, so ist $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.