7 Äquivalenzrelationen

7.1 Äquivalenzrelationen und Klassen

Definition
Eine Relation $\sim_R$ auf einer Menge oder einem allgemeineren Objektbereich heißt eine ***Äquivalenzrelation***, falls sie **reflexiv**, **symmetrisch** und **transitiv** ist.

Beispiele.

1. Die Gleichheit von Elementen einer vorgegebenen Menge ist eine Äquivalenzrelation, aber auch die Gleichheit von Mengen schlechthin.

2. Sei M die Menge der Legosteine in einem Baukasten. Die Relation

   $$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\quad x \text{ und } y \text{ haben die gleiche Farbe}$$

   ist eine Äquivalenzrelation.

   Die Reflexivität wirkt hier allerdings – wie bei vielen anderen Beispielen aus unserer Alltagswelt – etwas gekünstelt.

3. Sei M die Menge der Bücher in einem Bücherschrank. Die Relation

   $$x \sim_1 y \;:\Longleftrightarrow\quad x \text{ steht neben } y$$

   ist (mit etwas gutem Willen) reflexiv und auf jeden Fall symmetrisch. Sie ist aber sicher nicht transitiv.

   Die Relation $\sim_2$ mit

   $$x \sim_2 y \;:\Longleftrightarrow\quad \text{die Titel von } x \text{ und } y \text{ beginnen mit dem gleichen Buchstaben}$$

   ist eine Äquivalenzrelation.

4. Hier nun ein mathematisches Beispiel: Die Relation $\equiv$ auf $\mathbb{Z}$ mit

   $$x \equiv y \text{ (in Worten: } x \text{ kongruent zu } y) \;\;:\Longleftrightarrow\;\; 3 \,\big|\, (y - x)$$

   ist eine Äquivalenzrelation.

   - $x \equiv x$, weil 3 ein Teiler von $0 = x - x$ ist.
   - Sei $x \equiv y$. Dann gibt es ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $y - x = 3q$. Dann ist $x - y = 3(-q)$, also $y \equiv x$.
   - Sei $x \equiv y$ und $y \equiv z$. Dann ist $y - x = 3q$ und $z - y = 3p$, also $z - x = (z - y) + (y - x) = 3p + 3q = 3(p + q)$ und damit $x \equiv z$.

Sei nun M eine beliebige Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann kann man zu jedem $x \in M$ die Teilmenge

$$M(x) := \{y \in M \; : \; y \sim x\}$$

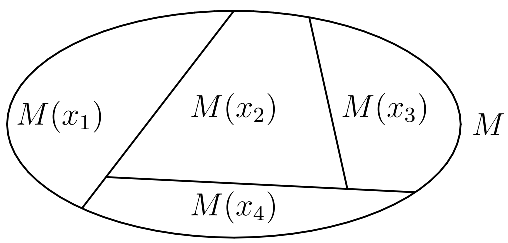
definieren. Man nennt $M(x)$ die ***Äquivalenzklasse*** von x. Es gilt:

1. Ist $M(x) \cap M(y) \neq \varnothing$, so ist $M(x) = M(y)$.

   Beweis: Sei $x_0 \in M(x) \cap M(y)$. Dann ist $x_0 \sim x$ und $x_0 \sim y$, also $x \sim y$. Liegt $a \in M(x)$, so ist $a \sim x$ und $x \sim y$, also auch $a \sim y$ und $a \in M(y)$. Das bedeutet, dass $M(x) \subset M(y)$ ist, und analog folgt, dass $M(y) \subset M(x)$ ist. ∎

2. Weil jeweils x in $M(x)$ liegt, ergibt die Vereinigung aller Äquivalenzklassen die ganze Menge M.

Beide Eigenschaften zusammen besagen, dass die Äquivalenzklassen eine ***Zerlegung*** der Menge M ergeben.



Diese Tatsache wird in der Mathematik gerne benutzt, um neue Objekte zu erschaffen.

Beispiele.

1. Im Falle der Äquivalenzrelation auf den Legosteinen besteht eine Äquivalenzklasse aus allen Bausteinen gleicher Farbe. Es gibt also die Klasse der roten Steine, die Klasse der blauen und die Klasse der gelben Steine. Die Zerlegung in Äquivalenzklassen liefert als neuen abstrakten Begriff die Farben Rot, Blau, Gelb usw.

   Man kann einem Kind, das die Farben noch nicht kennt, nicht erklären, was Rot ist. Man kann nur deutlich machen, dass sich gewisse Bausteine durch eine gemeinsame Eigenschaft auszeichnen, und diese Eigenschaft nennt man „Rot“.

2. Die Äquivalenzrelation $\sim_2$ auf der Menge von Büchern liefert Klassen, die jeweils durch einen Buchstaben repräsentiert werden.

3. Die Kongruenz liefert eine Klasseneinteilung der Menge $\mathbb{Z}$. Was bedeuten die Äquivalenzklassen? Ist $n \in \mathbb{Z}$, so ist die Äquivalenzklasse von n, die man gerne mit $[n]$ oder $[n]_3$ bezeichnet, die Menge

$$[n]_3 = \{n + 3k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Vielleicht versteht man diese Menge besser, wenn n sogar eine natürliche Zahl ist. Dann kann man nämlich eine Division mit Rest durchführen:

$$n = 3 \cdot q + r \text{ mit } 0 \leq r < 3.$$

Dann ist $[n]_3 = \{r+3m \,:\, m \in \mathbb{Z}\}$. Die gemeinsame Eigenschaft der Elemente der Äquivalenzklasse besteht darin, dass sie bei Division durch 3 den Rest r lassen. Nun gibt es bei Division durch 3 nur 3 mögliche Reste, nämlich 0, 1 oder 2. Das führt dazu, dass $\mathbb{Z}$ in die 3 Äquivalenzklassen $[0]_3$, $[1]_3$ und $[2]_3$ zerfällt. Man nennt sie auch „Restklassen“, aus naheliegenden Gründen.

7.2 Die Konstruktion von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

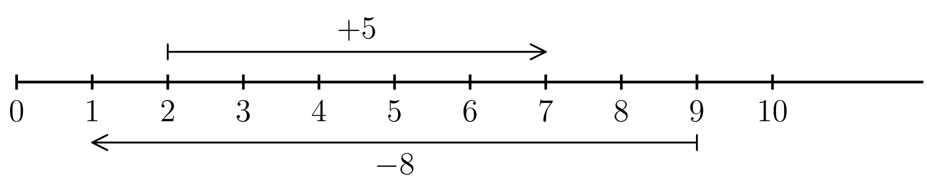
Ich hatte versprochen zu zeigen, wie man die Zahlenbereiche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ schrittweise aus den natürlichen Zahlen konstruieren kann. Das soll nun andeutungsweise durchgeführt werden.

Zur Konstruktion von $\mathbb{Z}$ betrachtet man Paare $(x, y) \in \mathbb{N}$ und erklärt auf diesen eine Äquivalenzrelation:

$$(a, b) \sim (c, d) \;:\Longleftrightarrow\; a + d = c + b.$$

Wenn man die ganzen Zahlen schon hätte, könnte man ja schreiben: $a - b = c - d$. Der Witz hier ist, dass man diese Beziehung allein mit den natürlichen Zahlen und ihren Rechenmöglichkeiten ausdrücken kann. Aber was soll das Ganze? Die folgende Idee steht dahinter.

Wenn man nur die natürlichen Zahlen kennt, dann kann man sich die ganzen Zahlen als eine Verschiebung nach rechts oder links auf der Zahlenskala vorstellen:



Eine Verschiebung nach rechts um 5 Einheiten verschiebt den Punkt 1 nach 6, den Punkt 2 nach 7 usw., kann also durch die Zahlenpaare $(0, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 7)$, $(3, 8), \ldots$ beschrieben werden. Eine Verschiebung nach links um 8 Einheiten verschiebt 8 nach 0, 9 nach 1 usw., kann also durch die Zahlenpaare $(8, 0)$, $(9, 1)$, $(10, 2), \ldots$ beschrieben werden. Die Differenz $y - x$ beim Paar (x, y) liefert die Verschiebung, aber leider als ganze Zahl. Zwei Paare (a, b) und (c, d) sind äquivalent, wenn $b - a = d - c$ ist. Diese Gleichung kann zu $a + d = c + b$ umgeformt werden, und in dieser Form braucht man nur die natürlichen Zahlen.

Es handelt sich tatsächlich um eine Äquivalenzrelation:

1. Refexivität: Weil $a + b = a + b$ ist, ist $(a, b) \sim (a, b)$.
2. Symmetrie: Ist $(a, b) \sim (c, d)$ und deshalb $a+d = c+b$, so ist auch $c+b = a+d$, also $(c, d) \sim (a, b)$.
3. Transitivität: Sei $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$. Dann ist $a+d = c+b$ und $c+f = e+d$, also $a + (d+c) + f = e + (c+d) + b$ und damit $a + f = e + b$. Daraus folgt, dass $(a, b) \sim (e, f)$.

Die Äquivalenzklasse eines Paares (x, y) steht für eine Verschiebung um die ganze Zahl $y-x$. Deshalb ist es sinnvoll, $\mathbb{Z}$ als Menge der Äquivalenzklassen zu definieren.

Im nächsten Schritt konstruieren wir die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen aus $\mathbb{Z}$. Hier ist die Idee etwas einfacher zu verstehen. Ein ***Bruch*** p/q besteht aus Zähler und Nenner und kann daher auch als Zahlenpaar $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ aufgefasst werden. Zwei Paare (p, q) und (r, s) definieren den gleichen Bruch, falls $p/q = r/s$ ist, also $ps = qr$.

Genauso macht man es. Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ wird eine Äquivalenzrelation erklärt, durch

$$(p, q) \sim (r, s) \ :\Longleftrightarrow \ ps = rq.$$

Nun ist eine rationale Zahl eine Äquivalenzklasse bezüglich dieser Relation. Würde man rationale Zahlen durch feste Paare (p, q) mit $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ definieren, so bekäme man Schwierigkeiten bei der Einführung der Rechenoperationen. Verwendet man Äquivalenzklassen, so geht es ganz einfach. Wir benutzen die Bruch-Schreibweise p/q für die Äquivalenzklasse des Paares (p, q).

Als Produkt der Klassen p/q und p'/q' definiert man die Klasse $(pp')/(qq')$, und als Summe die Klasse $(pq' + qp')/(qq')$. Nun taucht ein Problem auf, das typisch für den Umgang mit Äquivalenzklassen ist. Wir müssen die Unabhängigkeit der Definition von den Repräsentanten beweisen. Sei $p/q = r/s$ (also $ps = qr$) und $p'/q' = r'/s'$ (also $p's' = q'r'$). Dann gilt:

$$(pp')(ss') = (ps)(p's') = (qr)(q'r') = (qq')(rr'), \text{ also } \frac{pp'}{qq'} = \frac{rr'}{ss'}.$$

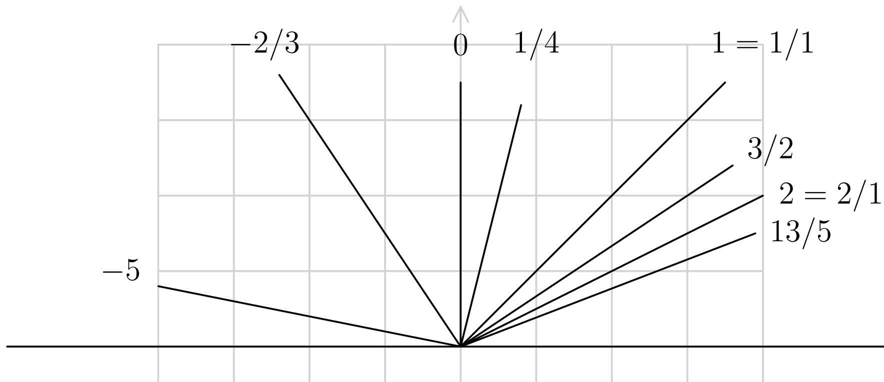
Analog läuft es bei der Addition. Es ist

$$(pq' + qp')(ss') = (ps)(q's') + (p's')(qs) = (qr)(q's') + (q'r')(qs) = (rs' + sr')(qq'),$$

$$\text{also} \quad \frac{pq' + qp'}{qq'} = \frac{rs' + sr'}{ss'}.$$

Hat man so die Unabhängigkeit von den Repräsentanten gezeigt, so kann man die Bruchschreibweise benutzen, um zu zeigen, dass in der Menge $\mathbb{Q}$ der Äquivalenzklassen die bekannten Rechenregeln gelten. Es folgt insbesondere, dass $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper ist. Weil der Nenner q eine natürliche Zahl ist, kann man p/q positiv nennen, wenn $p > 0$ ist.

Man kann sich den Vorgang der Äquivalenzklassen-Bildung in diesem Falle folgendermaßen veranschaulichen:



Jedes Paar (p, q) mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ entspricht einem Punkt mit ganzzahligen Koordinaten in der oberen Halbebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\}$. Zwei Punkte (p, q) und (r, s) sind genau dann äquivalent, wenn sie auf der gleichen Geraden $G(p, q) = \{y = mx \,:\, m = p/q\}$ liegen (denn dann ist $r = (p/q)s$, also $rq = ps$.

Die Äquivalenzklasse von (p, q) ist also die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \,:\, px - qy = 0\}$.

Im nächsten Schritt müsste man nun $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ konstruieren. Das ist nicht ganz leicht. Es gibt viele verschiedene Verfahren dafür, die alle mit dem Vollständigkeitsaxiom in Zusammenhang stehen.

Wir haben die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ mit Hilfe von monoton wachsenden und nach oben beschränkten Folgen erklärt. Konstruktiv erhalten wir deshalb $\mathbb{R}$, indem wir zu $\mathbb{Q}$ die Grenzwerte solcher Folgen hinzufügen. Leider haben wir die nicht zur Verfügung, wenn nur $\mathbb{Q}$ bekannt ist. Also benutzen wir die Menge aller monoton wachsenden und nach oben beschänkten Folgen $a_n \in \mathbb{Q}$ als Ausgangspunkt. Da verschiedene Folgen den gleichen Grenzwert haben können, braucht man wieder eine Äquivalenzrelation. Zwei Folgen a_n und b_n heißen äquivalent, falls die Folge $a_n - b_n$ gegen Null konvergiert. Dass diese Relation tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist, rechnet man leicht nach. $\mathbb{R}$ ist dann die Menge der Äquivalenzklassen.

Ist $r \in \mathbb{Q}$, so ist $a_n = r - 1/n$ eine monoton wachsende Folge von rationalen Zahlen, die durch r nach oben beschränkt ist. Ihre Äquivalenzklasse kann mit der Zahl r identifiziert werden. Damit enthält $\mathbb{R}$ alle rationalen Zahlen.

Dass die hier konstruierte Menge tatsächlich alle Axiome der reellen Zahlen erfüllt, muss natürlich gezeigt werden. Diesen aufwändigen Nachweis lassen wir hier aber weg.

7.3 Die Mächtigkeit von Mengen

Es wurde am Anfang erwähnt, dass der Objektbereich für eine Äquivalenzrelation nicht unbedingt eine Menge sein muss. Das ist zum Beispiel bei der folgenden Relation der Fall, deren Objektbereich alle Mengen umfasst.

Definition

Zwei Mengen A und B heißen ***gleichmächtig***, falls es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt. Man sagt dann auch, sie haben die gleiche ***Mächtigkeit*** (oder ***Kardinalzahl***).

Zunächst muss nachgewiesen werden, dass die „Gleichmächtigkeit“ eine Äquivalenzrelation ist.

1. Ist A eine beliebige Menge, so ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_A : A \to A$ bijektiv. Also ist A zu sich selbst gleichmächtig. Ein Problem könnte sich bei der leeren Menge ergeben, denn wir wissen nicht, was eine Abbildung von $\varnothing$ auf sich sein soll. Allerdings ist bei einer solchen Abbildung nichts zu definieren, denn die leere Menge hat ja keine Elemente.

2. Ist A gleichmächtig zu B, so gibt es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$. Vermöge der Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ ist dann auch B gleichmächtig zu A.

3. Für die Transitivität untersuchen wir den Fall, dass A gleichmächtig zu B und B gleichmächtig zu C ist. Dann gibt es bijektive Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$, und dazu Umkehrabbildungen f^{-1} und g^{-1}. Diese können wir zur Abbildung $F := f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$ verknüpfen. Man rechnet leicht nach, dass $F \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_A$ und $(g \circ f) \circ F = \mathrm{id}_C$ ist. Also ist $g \circ f$ bijektiv, mit Umkehrabbildung F. Daraus folgt: A ist auch gleichmächtig zu C.

Die Kardinalzahl einer Menge ist nun ihre Äquivalenzklasse bezüglich Gleichmächtigkeit. Zwei endliche Mengen sind offensichtlich genau dann gleichmächtig, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen besitzen. Deshalb ist deren Kardinalzahl genau diese Anzahl. Die Null ist die Kardinalzahl der leeren Menge.

Eine Menge M heißt ***abzählbar***, falls sie gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ ist. Die Kardinalzahl von $\mathbb{N}$ (und damit von allen abzählbaren Mengen) bezeichnet man mit $\aleph_0$ („Aleph-Null“). Schreiben wir $|A|$ für die Kardinalzahl von A, so ist

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Wenn es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt, so sagt man: $|A| \leq |A|$. Wenn die Kardinalzahlen außerdem ungleich sind, so ist sogar $|A| < |B|$.

Definition

Sind die Mengen A und B disjunkt, so setzt man $|A| + |B| := |A \cup B|$.

Sind die Mengen A und B nicht disjunkt, so macht man sie künstlich disjunkt, etwa, indem man sie durch $A \times \{0\}$ und $B \times \{1\}$ ersetzt. So kann man auch $k \cdot |A| = |A| + |A| + \cdots + |A|$ (k-mal) definieren.

Man kann also mit Kardinalzahlen rechnen. Bei endlichen Kardinalzahlen ergibt sich das bekannte Rechnen mit natürlichen Zahlen. Bei unendlichen Kardinalzahlen werden die Ergebnisse allerdings sehr sonderbar. Zum Beispiel gilt:

$$\aleph_0 + k = \aleph_0, \text{ und sogar } \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Die Kardinalzahl von $\mathbb{R}$ muss echt größer als $\aleph_0$ sein, denn $\mathbb{N}$ ist Teilmenge von $\mathbb{R}$, aber $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

7.3.1 Satz *Sei M eine Menge mit n Elementen. Dann besitzt die Potenzmenge $P(M)$ 2^n Elemente.*

Beweis: Es gibt $\binom{n}{k}$ Teilmengen von M mit k Elementen. Also gibt es in $P(M)$ genau $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$ Elemente. ∎

Definition
Sei M eine beliebige Menge. Dann setzt man $2^{|M|} := |P(M)|$.

Für endliche Mengen haben wir die Gleichung bewiesen, für unendliche Mengen macht sie erst durch die Definition Sinn.

7.3.2 Satz von Cantor: *Ist M eine beliebige Menge, so ist $|P(M)| > |M|$.*

Beweis: Die Aussage ist trivial für die leere Menge. Also kann man annehmen, dass $M \neq \varnothing$ ist. Die Abbildung $f : M \to P(M)$ mit $f(x) := \{x\}$ ist injektiv. Also ist $|M| \leq |P(M)|$.

Sei nun $T \subset P(M)$ eine beliebige Teilmenge mit $|T| = |M|$ und $\varphi : M \to T$ eine zugehörige bijektive Abbildung. Wir wollen zeigen, dass $P(M) \setminus T \neq \varnothing$ ist, denn dann ist auf jeden Fall $|M| \neq |P(M)|$, also $|M| < |P(M)|$.

Man kann M folgendermaßen in zwei disjunkte Mengen zerlegen: $M = M_1 \cup M_2$ mit

$$M_1 := \{x \in M \,:\, x \in \varphi(x)\} \quad \text{und} \quad M_2 := \{x \in M \,:\, x \notin \varphi(x)\}.$$

Die Menge $L := M_2 = M \setminus M_1$ liegt in $P(M)$.

Behauptung: $L \notin T$.

Beweis dazu: Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist, dass also $L \in T$ gilt. Dann gibt es ein $x \in M$ mit $\varphi(x) = L$.

1. Fall: Ist $x \in M_1$, so liegt x in $\varphi(x) = L = M_2$. Das kann nicht sein, weil $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ ist.

2. Fall: Ist $x \in M_2$, so liegt x nicht in $\varphi(x) = L = M_2$. Das ist ein Widerspruch.

Also ist die Behauptung wahr und $|M| < |P(M)|$. ∎

Man kann sehr einfach eine bijektive Abbildung $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ konstruieren. Also gilt für die Mächtigkeiten: $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$.

Jeder Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ kann man die Funktion $c_M : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ mit

$$c_M(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zuordnen. Das ergibt eine bijektive Abbildung von $P(\mathbb{N})$ auf $\mathscr{F} := \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$. Andererseits kann man jeder reellen Zahl $x \in (0,1)$ eindeutig eine Binär-Entwicklung zuordnen, also eine Folge a_i von Nullen und Einsen, und durch $f(i) := a_i$ dann ein Element von $\mathscr{F}$. Das bedeutet, dass $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})|$ ist.

Cantor und seine Nachfolger stellten sich lange die Frage, ob es eine Menge M mit $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |M| < |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ gibt. Diese Frage ist ungeheuer schwer zu beantworten. Die Aussage, dass es eine solche Menge nicht gibt, wird als ***Kontinuumshypothese*** bezeichnet. Erst 1963 zeigte der amerikanische Mathematiker Cohen, dass die Kontinuumshypothese unabhängig vom Axiomensystem der Mengenlehre ist und deshalb innerhalb dieses Axiomensystems überhaupt nicht zu beweisen ist.

Nimmt man an, dass die Hypothese gültig ist, so bleibt immer noch das wundersame Ergebnis, dass es eine unendliche Folge von Mächtigkeiten gibt:

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots ,$$

mit $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$, $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$ usw. Dem entsprechen immer gigantischere Mengen, die jenseits unserer Vorstellungswelt liegen.