5 Irrationales

5.1 Folgen, Konvergenz und Vollständigkeit

Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert eine Folge von reellen Werten

$$a_1 = a(1),\ a_2 = a(2),\ a_3 = a(3),\ \ldots$$

Solche Zahlenfolgen werden uns dazu dienen, Grenzübergänge durchzuführen und neue, unbekannte reelle Zahlen aufzuspüren. Wir betrachten einige typische Beispiele:

1. Die Folge der Zahlen 1, 2, 3, ... wächst und wächst und wächst ... Wohin? Unserem Gefühl nach wächst sie unbeschränkt. Wir werden aber untersuchen müssen, ob das stimmt.

2. Ein wichtiges Beispiel ist die Folge $a_n := 1/n$, also die Folge der Zahlen

   $$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{101},\ \ldots,\ \frac{1}{1.000.000},\ \ldots$$

   Dem Anschein nach werden diese Zahlen kleiner und kleiner und streben gegen Null. Was sollen sie sonst auch tun? Aber der Begriff „streben nach ... “ muss erst präzisiert werden, und dann ist noch nicht klar, ob die Folge $1/n$ tatsächlich gegen Null strebt, und nicht etwa gegen eine uns noch unbekannte Zahl $x_0 > 0$.

3. Wenn gesichert ist, dass $1/n$ gegen Null strebt, so kann man sich Folgen der Form $a_n = (2 + 3n)/(4n + 5)$ zuwenden. Weil $a_n = (3 + 2/n)/(4 + 5/n)$ ist, kann man vermuten, dass a_n gegen $3/4$ strebt. Ob es aber Regeln gibt, die unsere Vermutung stützen, muss erst nachgewiesen werden.

Definition

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt ***nach oben beschränkt***, falls es eine Zahl c gibt, so dass $x \le c$ für alle $x \in M$ gilt. Und die Zahl c heißt dann eine ***obere Schranke*** von M. Eine Folge a_n heißt nach oben beschränkt, falls die Menge $M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist.

Analog definiert man untere Schranken und nach unten beschränkte Mengen und Folgen. Ist eine Menge (bzw. eine Folge) sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt, so nennt man sie einfach eine ***beschränkte Menge*** (bzw. eine beschränkte Folge).

Zum Beispiel ist jedes Intervall eine beschränkte Menge.

Definition

Eine Folge a_n von reellen Zahlen ***konvergiert*** gegen eine Zahl a, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Man nennt dann a den ***Grenzwert*** der Folge und schreibt:

$$a_n \to a \text{ (für } n \to \infty), \quad \text{oder auch} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Was bedeutet das? Wir sagen, dass a_n gegen a konvergiert, wenn es zu jeder vorgegebenen „Genauigkeitsgrenze“ $\varepsilon > 0$ eine Nummer n_0 gibt, so dass ab dieser Nummer der Abstand zwischen a_n und a kleiner als ε ist. Durch diesen Trick können wir bereits im Endlichen eine Frage beantworten, die eigentlich erst im Unendlichen zu klären ist. Der Pferdefuß dabei ist die Formulierung „... zu **jedem** ε ... “. Wie man das beherrschen kann, wird sich noch zeigen.

Im Moment haben wir noch nicht einmal ein Mittel zu zeigen, dass die Folge $1/n$ gegen Null konvergiert. Dafür brauchen wir noch eine Eigenschaft der reellen Zahlen, die bisher noch nicht zur Sprache kam. Um diese formulieren zu können, müssen wir etwas ausholen.

Definition

Eine Folge a_n heißt ***monoton wachsend***, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

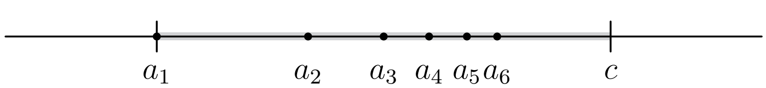
Monoton fallende Folgen definiert man analog.

Die Folge $a_n = n$ der natürlichen Zahlen ist z.B. monoton wachsend. Eine ganze Klasse von Beispielen gewinnt man folgendermaßen: Ist c_n eine Folge von positiven (oder zumindest nicht negativen) Zahlen, so setze man

$$a_1 := c_1,\ a_2 := a_1 + c_2,\ a_3 := a_2 + c_3 \text{ und allgemein } a_{n+1} := a_n + c_n.$$

Dann ist a_n offensichtlich monoton wachsend.

Jetzt betrachten wir eine spezielle Situation. Es sei a_n eine monoton wachsende Folge von positiven reellen Zahlen, die außerdem durch eine reelle Zahl c nach oben beschränkt ist.



Die Folgeglieder a_n sind zwischen a_1 und c eingesperrt. Weil die Werte monoton ansteigen, erscheint es völlig plausibel, dass sie gegen einen Wert $a \in [a_1, c]$ konvergieren. Eigentlich kann es gar nicht anders sein, aber beweisen können wir das nicht. Es bleibt nur ein Ausweg, wir müssen die Existenz des Grenzwertes als Axiom fordern.

Vollständigkeits-Axiom: *Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge positiver reeller Zahlen konvergiert.*

Man kann sich leicht überlegen, dass die Folgeglieder a_n im Axiom nicht unbedingt positiv zu sein brauchen, und man kann aus dem Axiom herleiten, dass genauso jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge konvergiert. Wir werden das benutzen, ohne es hier explizit zu beweisen.

5.2 Archimedes-Prinzip und Konvergenzbeweise

5.2.1 Satz (von Archimedes) *Die Folge der natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ist **nicht** nach oben beschränkt.*

BEWEIS: Wie bei fast allem, was mit der Unendlichkeit zu tun hat, bietet sich ein Widerspruchsbeweis an. Wir nehmen an, $\mathbb{N}$ sei durch eine reelle Zahl c nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeits-Axiom muss dann die Folge der natürlichen Zahlen gegen eine Zahl a konvergieren. Definitionsgemäß bedeutet das, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gibt. Das gilt dann insbesondere für $\varepsilon = 1/2$. Es sei also $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|n - a| < 1/2$ für $n \geq n_0$ gilt.

Dann ist $-1/2 < n - a < 1/2$, also $a - 1/2 < n < a + 1/2$ für alle $n \geq n_0$. Speziell ist $a - 1/2 < n_0$. Aber mit n_0 ist auch $n_0 + 1$ eine natürliche Zahl. Und weil $a + 1/2 = (a - 1/2) + 1 < n_0 + 1$ ist, erhalten wir einen Widerspruch zu der Aussage, dass stets $n < a + 1/2$ ist. Die Annahme ist demnach falsch! ∎

Der Satz von Archimedes bedeutet insbesondere: Zu jeder reellen Zahl c gibt es eine natürliche Zahl $n > c$. Daraus folgt: Ist $x > 0$, so gibt es zu jeder Zahl c ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $nx > c$ ist.[1]

Folgerung 5.2.2 *Die Folge $a_n := 1/n$ konvergiert gegen Null.*

BEWEIS: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist $1/\varepsilon$ ebenfalls eine reelle Zahl, und es gibt nach Archimedes eine natürliche Zahl $n_0 > 1/\varepsilon$. Ist nun $n \geq n_0$, so ist

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Das war zu zeigen. ∎

Das Prinzip des Archimedes hilft auch bei anderen Konvergenzuntersuchen.

[1] In dieser Form taucht das Archimedes-Prinzip schon bei Euklid als geometrische Aussage auf, als noch **vor** Archimedes! Sind c und x zwei Strecken, so kann man x so weit verlängern, dass eine Strecke herauskommt, die c an Länge übertrifft.

Beispiel.

Für eine reelle Zahl $0 < q < 1$ untersuchen wir die Folge $a_n := q^n$. Testet man einige konkrete Zahlenbeispiele, so kommt man rasch zu der Vermutung, dass a_n gegen Null konvergiert. Was fehlt, ist eine Beweisidee. Die zu finden, ist etwas trickreich:

- Um zu zeigen, dass q^n gegen Null konvergiert, kann man auch zeigen, dass $(1/q)^n$ über alle Schranken wächst. Dafür müsste man z.B. $(1/q)^n$ nach **unten** durch etwas abschätzen, das beliebig wächst, etwa in der Form $(1/q)^n \geq a \cdot n + b$ mit geeigneten Konstanten a und b.

- Nun sollte man sich an die Bernoulli'sche Ungleichung erinnern: $(1 + x)^n > 1 + nx$ für $n \geq 2$ und $x > -1$ und $x \neq 0$. Wie kann man dies nutzen?

  Weil $0 < q < 1$ ist, ist $1/q > 1$. Es gibt also ein $x > 0$, so dass $1/q = 1 + x$ ist.

Die Bernoulli'sche Ungleichung liefert jetzt die Abschätzung

$$(1/q)^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Nun sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, und da es nur um sehr kleine ε geht, können wir sogar annehmen, dass $0 < \varepsilon < 1$ ist. Aber dann ist $1/\varepsilon > 1$ und $1/\varepsilon - 1 > 0$, und nach Archimedes gibt es ein n_0 mit $n_0 x > 1/\varepsilon - 1$. Für $n \geq n_0$ ist dann auch $nx > 1/\varepsilon - 1$, also $(1/q)^n \geq 1 + nx > 1/\varepsilon$ und damit $q^n < \varepsilon$. Das bedeutet, dass q^n gegen Null konvergiert.[2]

Die folgenden Hilfsaussagen machen das Leben manchmal einfacher:

5.2.3 Satz

1. *Die Folge a_n konvergiert genau dann gegen a, wenn $a_n - a$ gegen Null konvergiert.*

2. *Sei c eine Konstante und x_n eine Folge von Zahlen. Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n| < c\,\varepsilon$ für $n \geq n_0$ ist, so konvergiert x_n gegen Null.*

BEWEIS: 1) ist trivial.

2) Sei $\varepsilon_1 > 0$ vorgegeben. Dann setze man $\varepsilon := \varepsilon_1/c$. Nach Voraussetzung gibt es ein n_0, so dass $|x_n| < c\,\varepsilon = \varepsilon_1$ ist. Das bedeutet, dass x_n gegen Null konvergiert. ■

Die zweite Aussage bedeutet, dass man bei Konvergenzbeweisen nicht immer einen Schönheitswettbewerb gewinnen muss. Es ist zwar toll, wenn der Beweis mit „$\ldots < \varepsilon$" endet, aber auch nicht schlimm, wenn er mit „$\ldots < 37\varepsilon$" endet.

5.2.4 Grenzwert-Sätze

[2] Die Ideen für die letzten Schritte des Beweises verschafft einem die Methode der „falschen Schlussrichtung": Die Ungleichung $q^n < \varepsilon$ entspricht der Ungleichung $(1/q)^n > 1/\varepsilon$. Weil $(1/q)^n = (1 + x)^n \geq nx + 1$ ist, braucht man die Ungleichung $nx + 1 > 1/\varepsilon$, also $nx > (1/\varepsilon) - 1$. Nun schreibt man aber alles in der umgekehrten Richtung auf.

1. *Die Folgen (a_n) bzw. (b_n) seien konvergent gegen a bzw. b. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

2. *Sei (a_n) konvergent gegen a. Sind a und alle $a_n \neq 0$, so ist*

$$\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 1/a\,.$$

BEWEIS: Wir beschränken uns hier auf den Beweis des einfachsten Falles, der Summe zweier Folgen:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es natürliche Zahlen n_0 und m_0, so dass gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0, \text{ und } |b_m - b| < \varepsilon \text{ für } m \geq m_0.$$

Sei $k_0 := \max(n_0, m_0)$. Ist dann $k \geq k_0$ (also erst recht $k \geq n_0$ und $k \geq m_0$), so gilt:

$$|(a_k + b_k) - (a + b)| \leq |a_k - a| + |b_k - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Damit konvergiert $a_k + b_k$ gegen $a + b$. ∎

Beispiele.

1. Die Folge $1/n^2 = 1/n \cdot 1/n$ ist offensichtlich eine Nullfolge.

   Die Folge $a_n = n/(n+1) = 1/(1 + 1/n)$ konvergiert gegen 1.

2. Typische Anwendungsbeispiele sind Folgen wie

$$a_n := \frac{18n^3 + 2n^2 - 329}{3n^3 - 25n^2 + 12n - 37}.$$

   Dividiert man Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz von n, hier also durch n^3, so erhält man:

$$a_n = \frac{18 + 2 \cdot \frac{1}{n} - 329 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3}{3 - 25 \cdot \frac{1}{n} + 12 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 - 37 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3}.$$

   Da $1/n$ gegen Null konvergiert, folgt mit den Grenzwertsätzen, dass (a_n) gegen $18/3 = 6$ konvergiert.

   Dieses Verfahren geht nur gut, solange die höchste Potenz von n im Nenner steht. Betrachten wir zum Beispiel

$$a_n := \frac{n^2 + 1}{3 - n} = \frac{n}{\frac{3}{n} - 1} - \frac{1}{n - 3}.$$

   Der zweite Summand strebt gegen Null, aber der erste konvergiert nicht.

3. In manchen Fällen ist besondere Vorsicht geboten.

$$\text{Sei} \quad a_n := \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}.$$

Erste Idee: Man dividiert oben und unten durch n^2 und erhält so:

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Da jeder Summand gegen 0 strebt, schließt man, dass auch der ganze Ausdruck gegen 0 konvergiert. Das stimmt aber nicht, weil die Anzahl der Summanden ständig wächst. Im Grenzfall hätte man sogar unendlich viele Summanden.

Zweite Idee: Wir erinnern uns an die Gauß–Formel: Wenn wir im Zähler $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ einsetzen, so erhalten wir:

$$a_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{n}),$$

und das konvergiert gegen 1/2. Das ist das richtige Ergebnis.

5.3 Existenz der Quadratwurzel

Ein wichtiges Konvergenzkriterium liefert uns ja schon das Vollständigkeitsaxiom. Allerdings gibt das Axiom keinerlei Auskunft über den Grenzwert selbst.

Beispiel.

Sei $a > 0$. Wir definieren rekursiv eine Folge (x_n). Die Zahl $x_0 > 0$ kann beliebig gewählt werden, und dann sei

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big).$$

Wir werden mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz zeigen, dass (x_n) konvergiert, und anschließend den Grenzwert bestimmen.

Offensichtlich ist $x_n > 0$ für alle n, also (x_n) nach unten beschränkt. Außerdem ist

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) = \frac{2x_n^2 - x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0,$$

denn es ist

$$\begin{aligned} x_n^2 - a &= \frac{1}{4}\Big(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\Big)^2 - a \\ &= \frac{1}{4}\Big(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} - 4a\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\Big)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Damit ist (x_n) monoton fallend und konvergiert gegen eine reelle Zahl c.

Offensichtlich muss $c \geq 0$ sein. Wäre $c = 0$, so würde auch (x_n^2) gegen Null konvergieren. Das ist aber nicht möglich, da stets $x_n^2 \geq a > 0$ ist. Also ist $c > 0$. Da auch (x_{n+1}) gegen c konvergiert, folgt die Gleichung

$$c = \frac{1}{2}\big(c + \frac{a}{c}\big).$$

Es ergibt sich $2c^2 = c^2 + a$, also $c^2 = a$.

Definition

Sei $a \geq 0$ eine reelle Zahl. Die eindeutig bestimmte Zahl $c \geq 0$ mit $c^2 = a$ nennt man die ***(Quadrat-)Wurzel*** von a, in Zeichen $c = \sqrt{a}$

Der Grenzwert der oben konstruierten rekursiven Folge ist also die Zahl $\sqrt{a}$. Ihre Existenz ergibt sich somit aus dem Vollständigkeitsaxiom.

Bemerkung: $x = \sqrt{a}$ ist natürlich nicht die einzige Lösung der Gleichung $x^2 = a$, auch $-\sqrt{a}$ ist eine Lösung. Aber **die Wurzel** aus a ist die **positive** Lösung.

Weil $|-x| = |x|$ ist, kann man generell folgern: $x^2 = a \implies |x| = \sqrt{a}$.