4 Paarungen

4.1 Produktmengen

Die Mengen $\{x, y\}$ und $\{y, x\}$ sind gleich, weil sie die gleichen Elemente enthalten. Manchmal legt man aber zusätzlich Wert auf die Reihenfolge der Elemente. Die Objekte x und y werden dann zu einem ***(geordneten) Paar*** (x, y) zusammengefasst. Zwei Paare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) heißen *gleich*, falls $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist. Das gibt Anlass zu einer weiteren Regel für die Bildung von Mengen.

Regel über die Existenz von Produktmengen:

Sind A und B zwei beliebige Mengen, so kann man die ***Produktmenge*** *(bzw. das* ***kartesische Produkt****)*

$$A \times B := \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

bilden.

Beispiele.

1. $\varnothing \times B = \varnothing$ und $A \times \varnothing = \varnothing$.

2. Sei $A := \{1, 2, 3\}$ und $B := \{a, b\}$. Dann ist

   $$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

   Allgemein gilt:

   Ist A eine endliche Menge mit n Elementen und B eine endliche Menge mit m Elementen, so ist $A \times B$ eine endliche Menge mit $n \cdot m$ Elementen.

3. Für beliebiges A bezeichnet man die Menge $A \times A$ manchmal auch mit A^2 (in Worten: „A hoch 2“).

   Speziell stellt die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ein Modell für die Anschauungs-Ebene dar. Die Elemente (x, y) nennt man dann auch die ***Punkte*** der Ebene, und die Einträge x und y die ***Koordinaten*** des Punktes (x, y).

   Sind $a < b$ und $c < d$ zwei reelle Zahlen, so nennt man $[a, b] \times [c, d]$ ein ***abgeschlossenes Rechteck***.

4. Sind A, B und C drei Mengen, so kann man aus ihren Elementen sogenannte ***(geordnete) Tripel*** (a, b, c) (mit $a \in A$, $b \in B$ und $c \in C$) bilden. Die Menge aller dieser Tripel wird mit $A \times B \times C$ bezeichnet. Ein wichtiges Beispiel ist der $\mathbb{R}^3$ (gesprochen „R–3“ oder „R hoch 3“):

   $$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

   Er stellt ein Modell für den Anschauungs-Raum dar.

In der Geometrie befasst man sich mit Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Wir beschränken uns hier auf den 2-dimensionalen Fall.

Definition

Es seien a, b, r reelle Zahlen mit $(a, b) \neq (0, 0)$ (was bedeutet, dass wenigstens eine der beiden Zahlen a und b nicht $= 0$ sein darf). Dann nennt man

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, ax + by = r\}$$

eine ***Gerade***. Zwei Geraden heißen ***parallel***, falls ihre Schnittmenge leer ist.

Das folgende Ergebnis wurde nicht in der Vorlesung behandelt:

4.1.1 Satz *Sind zwei Geraden $G_1 \neq G_2$ nicht parallel, so besitzen sie genau einen Schnittpunkt (d.h. ihre Schnittmenge besteht aus genau einem Element).*

Beweis: Sei $G_1 = \{(x, y) \, : \, a_1x + b_1y = r_1\}$ und $G_2 = \{(x, y) \, : \, a_2x + b_2y = r_2\}$. Dann gilt:

$$(x, y) \in G_1 \cap G_2 \iff a_1x + b_1y = r_1 \text{ und } a_2x + b_2y = r_2.$$

Das ist ein „lineares Gleichungssystem“ von 2 Gleichungen für 2 Unbekannte. Weil G_1 und G_2 nicht parallel sind, muss es mindestens eine Lösung (x_0, y_0) geben. Wir nehmen an, dass (x, y) irgendeine Lösung ist. Dann erfüllen

$$u := x - x_0 \text{ und } v = y - y_0$$

die Gleichungen $a_1u + b_1v = 0$ und $a_2u + b_2v = 0$.

1. Fall: $b_1 = 0$ und $a_1 \neq 0$. Wäre auch $b_2 = 0$, so wären $G_1 = \{(x, y) \, : \, x = r_1/a_1\}$ und $G_2 = \{(x, y) \, : \, x = r_2/a_2\}$ gleich oder parallel. Beides ist ausgeschlossen, es muss also $b_2 \neq 0$ sein. Damit ist $u = 0$ und $v = 0$, also $x = x_0$ und $y = y_0$.

2. Fall: Ist $b_1 \neq 0$ und $b_2 = 0$, so schließt man analog.

3. Fall: $b_1 \neq 0$ und $b_2 \neq 0$. Dann ist

$$v = -\frac{a_1}{b_1}\, u = -\frac{a_2}{b_2}\, u, \text{ also } \left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}\right) \cdot u = 0.$$

Ist $a_2/b_2 - a_1/b_1 = 0$, so haben die Geraden die Gestalt $G_1 = \{(x, y) \, : \, y = mx + q_1\}$ und $G_2 = \{(x, y) \, : \, y = mx + q_2\}$, und sie sind entweder gleich oder parallel. Weil das nicht sein kann, ist $u = v = 0$ und damit $x = x_0$ und $y = y_0$. ∎

Definition

Sei (x_0, y_0) ein Punkt in der Ebene und $r > 0$. Dann ist

$$K = \{(x, y) \, : \, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$

der ***Kreis*** um (x_0, y_0) mit ***Radius*** r.

4.2 Relationen

Eine Aussageform $R(x, y)$ mit 2 Variablen nennt man auch eine *(2-stellige)* ***Relation***. Statt „$R(x, y)$" kann man dann sagen: „x steht in Relation zu y". Oft führt man ein spezielles Symbol für die Relation ein, z.B. „$\sim_R$", und man schreibt dann $x \sim y$ für $R(x, y)$. Beispiele sind etwa die Element-Beziehung ($x \in M$) oder die Gleichheit von Elementen einer Menge. Die zulässigen Objektbereiche für die Variablen x, y einer Relation brauchen keine Mengen zu sein. Bei der Gleichheit von Mengen wäre das z.B. nicht möglich, denn dann bräuchte man ja die (Un-)Menge aller Mengen. Wenn die Objektbereiche aber zwei Mengen A und B sind, dann wird eine Relation zwischen den Elementen von A und B vollständig durch die Menge

$$R := \{(x, y) \in A \times B \,:\, x \sim_R y\}$$

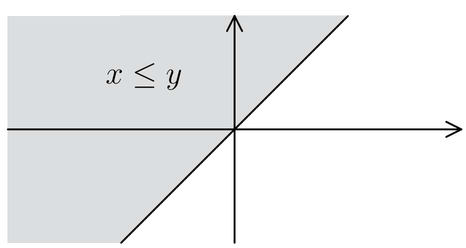
beschrieben. Deshalb findet man oft die Definition: „Eine Relation zwischen den Elementen von A und B ist eine Teilmenge R der Produktmenge $A \times B$."

Ist $A = B$, so spricht man von einer Relation auf der Menge A. Bei solchen Relationen interessiert man sich für besondere Eigenschaften. Die Relation $\sim$ heißt

- ***reflexiv***, falls gilt: $\forall\, x \in A \,:\, x \sim x$.
- ***symmetrisch***, falls gilt: $\forall\, x, y \in A \,:\, x \sim y \implies y \sim x$
- ***transitiv***, falls gilt: $\forall\, x, y, z \in A \,:\, (x \sim y) \wedge (y \sim z) \implies x \sim z$

Beispiele.

1. In $\mathbb{R}$ haben wir die Relation $\leq$. Sie ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch. Die zugehörige Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ sieht folgendermaßen aus:



2. In einer beliebigen Menge M ist die Relation $=$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. Dagegen ist die Relation $\neq$ zwar symmetrisch, aber weder reflexiv, noch transitiv.

3. Ist X die Menge der Einwohner von Wuppertal, so kann man Relation „ist Bruder von" betrachten. Sie ist natürlich nicht reflexiv. Auf den ersten Blick sieht die Relation symmetrisch aus, aber wenn Ernst Bruder von Marie ist, ist Marie noch lange nicht Bruder von Ernst. Aber wenn A Bruder von B und B Bruder von C ist, dann ist A auch Bruder von C. Die Relation ist also transitiv.

4.3 Abbildungen

Wir kommen nun zum wichtigsten Begriff in der Mathematik:

Definition

Gegeben seien zwei nicht-leere Mengen A und B. Es sei **jedem** Element $x \in A$ auf eine bestimmte Weise **genau ein** Element $y \in B$ zugeordnet. Dann heißt diese Zuordnung eine ***Funktion*** oder ***Abbildung*** von A nach B.

Die Menge A nennt man den ***Definitionsbereich***, die Menge B den ***Wertebereich*** oder die ***Zielmenge*** der Abbildung.

Die Zuordnung selbst wird mit einem Buchstaben bezeichnet. Ist etwa f dieser Buchstabe, so schreibt man die Zuordnung in der Form

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{oder} \quad f : A \longrightarrow B.$$

Wird dem Element $x \in A$ durch die Abbildung f das Element $y \in B$ zugeordnet, so schreibt man:

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad f : x \mapsto y.$$

In der älteren Literatur werden die Abbildungen oft in der Form $y = f(x)$ eingeführt, wobei $f(x)$ ein Term mit der Variablen x ist. Dann ist aber x kein bestimmtes Element von A, sondern ein Platzhalter für Elemente aus A.

Die Funktion ist eindeutig bestimmt durch ihren Graphen:

Definition

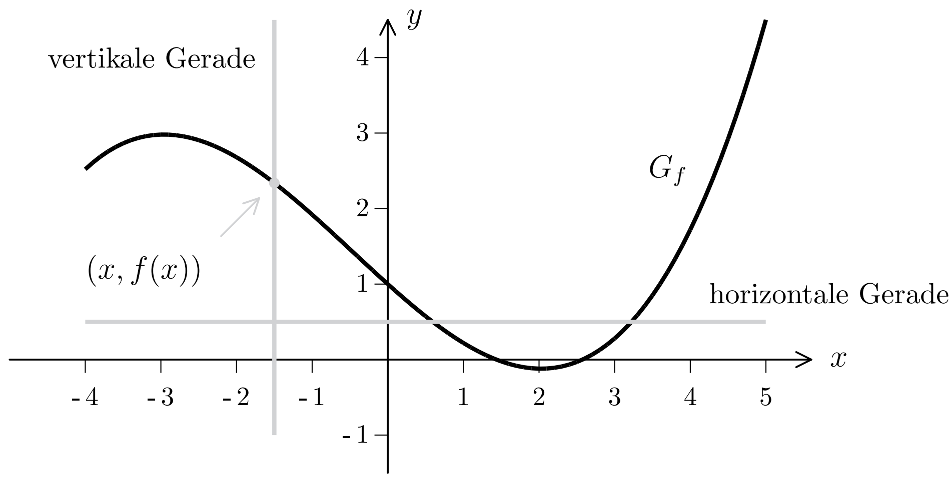
Jeder Funktion oder Abbildung $f : A \to B$ ist eine Menge $G_f \subset A \times B$ zugeordnet, nämlich ihr ***Graph***:

$$G_f := \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}.$$

Charakteristisch für den Graphen sind die folgenden Eigenschaften:

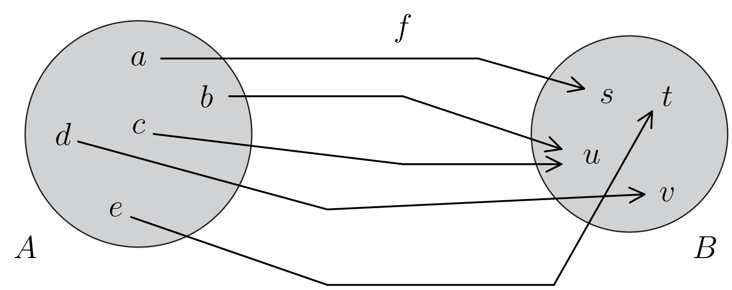
1. Da jedem $x \in A$ ***mindestens ein*** $y \in B$ zugeordnet ist, gilt:
$$\forall\, x \in A\ \exists\, y \in B \text{ mit } (x, y) \in G_f.$$
2. Da jedem $x \in A$ ***höchstens ein*** $y \in B$ zugeordnet ist, gilt:
$$\forall\, x \in A \text{ folgt: Ist } (x, y_1) \in G_f \text{ und } (x, y_2) \in G_f, \text{ so ist } y_1 = y_2.$$

Eine Menge $G \subset A \times B$ mit den Eigenschaften (1) und (2) bestimmt eindeutig eine Funktion $f : A \to B$ mit $G = G_f$. Die Eigenschaften bedeuten, dass der Graph von jeder vertikalen „Geraden“ genau einmal getroffen wird. Horizontale Geraden dürfen dagegen mehrfach oder gar nicht treffen.



Es gibt aber auch Funktionen, bei denen der Graph wenig aussagekräftig ist. Dann sucht man nach anderen Methoden der Darstellung, wie etwa im folgenden Beispiel:

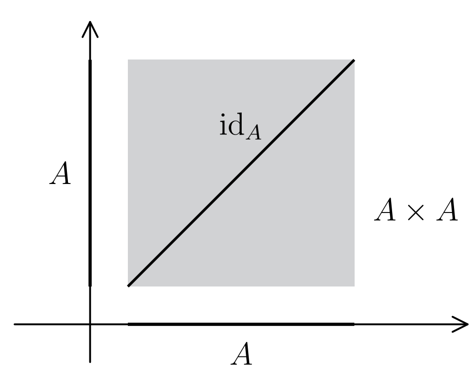
Es sei $A = \{a, b, c, d, e\}$ und $B = \{s, t, u, v\}$. Eine Abbildung $f : A \to B$ sei gegeben durch $f(a) := s$, $f(b) := u$, $f(c) := u$, $f(d) := v$ und $f(e) := t$. Wenn wir die Mengen mit Hilfe von Venn-Diagrammen aufzeichnen, können wir die Zuordnung f durch Pfeile beschreiben:



Damit f eine Abbildung ist, muss bei jedem $x \in A$ ein Pfeil starten. Es ist aber nicht notwendig, dass bei jedem $y \in B$ ein Pfeil ankommt. Weiter darf bei jedem $x \in A$ auch nur **ein** Pfeil starten. Hingegen ist es erlaubt, dass bei einem $y \in B$ mehrere Pfeile ankommen.

Die Begriffe ***Funktion*** und ***Abbildung*** bedeuten das gleiche. Allerdings hat es sich eingebürgert, speziell dann von einer „Funktion“ zu sprechen, wenn der Wertebereich eine Menge von Zahlen ist.

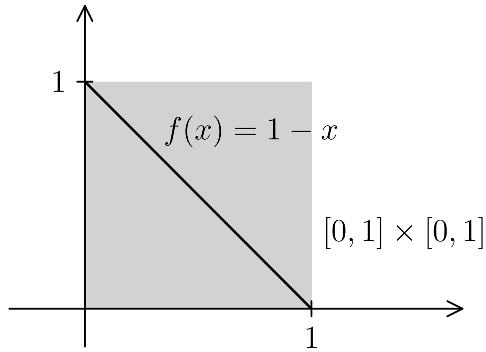
Ist $f : A \to A$ die Abbildung einer Menge auf sich, so kann man nach Reflexivität, Symmetrie und Transitivität fragen. Damit eine Abbildung eine reflexive Relation ist, muss $f(x) = x$ für alle $x \in A$ gelten. Damit ist f aber bereits vollständig festgelegt. Es handelt sich um die sogenannte ***identische Abbildung***.



Als Relation ist die identische Abbildung nichts anderes als die Gleichheit:

$$\mathrm{id}_A(x) = y \iff y = x.$$

Also ist die identische Abbildung auch eine symmetrische und transitive Relation. Eine Abbildung $f \neq \mathrm{id}_A$ von A auf sich kann nicht reflexiv sein, aber symmetrisch, wie das Beispiel der Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]$ mit $f(x) := 1-x$ zeigt.



Definition

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

1. Ist $M \subset A$, so heißt die Menge

$$f(M) := \{f(x) \mid x \in M\} = \{y \in B \mid \exists x \in M \text{ mit } y = f(x)\}$$

das ***(volle) Bild von*** M ***unter*** f.

2. Ist $N \subset B$, so heißt die Menge

$$f^{-1}(N) := \{x \in A \mid f(x) \in N\}$$

das ***(volle) Urbild von*** N ***unter*** f.

Die Menge $f(A)$ nennt man auch die ***Bildmenge*** von f. Sie muss gut vom Wertebereich B unterschieden werden!

Definition

Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen. Hintereinander ausgeführt ergeben sie eine neue Abbildung $g \circ f : A \to C$ durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad (\text{für } x \in A).$$

Man nennt $g \circ f$ die ***Verknüpfung*** (oder ***Verkettung***) von g mit f.

Einem Element $x \in A$ wird also zunächst ein Element $y = f(x) \in B$ zugeordnet, und diesem y wird seinerseits das Element $z = g(y)$ zugeordnet. Insgesamt ist dann $z = g(f(x))$. Obwohl man **zuerst** die Zuordnung f ausführt, und **dann** die Zuordnung g, schreibt man in der Verknüpfung $g \circ f$ die Abbildung g links von der Abbildung f. Aus der Definition wird klar, dass das so sein muss, aber es ist trotzdem immer ein wenig verwirrend. Dass die Reihenfolge eine wichtige Rolle spielt, kann man sofort sehen:

Beispiel.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := ax + b$. Dann ist

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= ax^2 + b \quad \text{und} \\ (f \circ g)(x) &= (ax + b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2. \end{aligned}$$

Zum Schluss dieses Abschnittes werfen wir noch einen Blick auf eine andere Sorte von Abbildungen:

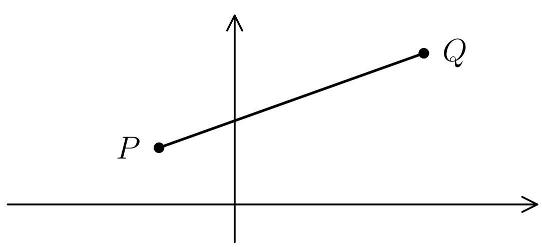
Eine Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ nennt man auch einen ***parametrisierten Weg***. In dem Fall gibt die Bildmenge $\alpha(\mathbb{R}) = \{\alpha(t) : t \in \mathbb{R}\}$, die sogenannte ***Spur*** von α, einiges an Information preis. Man stellt sich die Abbildung wie einen bewegten Punkt vor. Die Spur zeigt, wo sich dieser Punkt bewegt hat. Was bei diesem Bild fehlt, ist die Geschwindigkeit der Bewegung. Aber oftmals ist diese Geschwindigkeit nicht so relevant und kann daher erst mal vernachlässigt werden.

Hier sind ein paar Beispiele:

1) Sind $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ zwei Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$, so parametrisiert

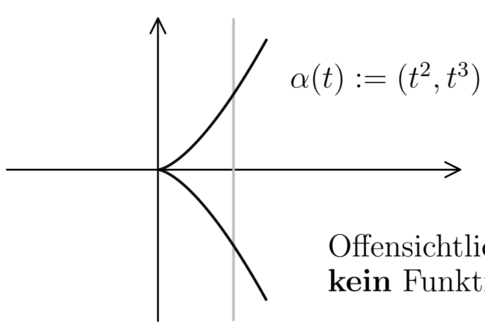
$$\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } \alpha(t) := (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$$

die ***Verbindungsstrecke*** von P und Q.



2) Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so parametrisiert $\alpha : I \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(t) := (t, f(t))$ den Graphen von f.

3) Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\alpha(t) := (t^2, t^3)$.



Offensichtlich ist diese Kurve **kein** Funktionsgraph!

4.4 Injektive und surjektive Abbildungen

Definition

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt ***surjektiv***, falls gilt:

$$\forall\, y \in B\ \exists\, x \in A \text{ mit } f(x) = y \qquad (\text{also } f(A) = B).$$

f ist surjektiv, wenn jedes Element $y \in B$ als Bild eines Elementes $x \in A$ vorkommt, also genau dann, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für **jedes** $y \in B$ lösbar ist.

Beispiele.

1. Ist $a \neq 0$, so ist die Abbildung $f(x) = ax + b$ immer surjektiv. Denn die Gleichung $y = ax + b$ wird durch $x = \dfrac{1}{a}(y - b)$ gelöst.
2. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ ist nicht surjektiv, denn negative Zahlen können nicht als Bild vorkommen.
3. Sei $\mathscr{P}$ die Menge der Primzahlen und $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathscr{P}$ definiert durch $f(n) :=$ kleinster Primteiler von n. Wegen der Beziehung $f(p) = p$ für $p \in \mathscr{P}$ ist f surjektiv.
4. Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(n) := 2n$ ist nicht surjektiv, da als Bilder nur gerade Zahlen vorkommen.

Definition

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt ***injektiv***, falls gilt:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ gilt: Ist } x_1 \neq x_2, \text{ so ist auch } f(x_1) \neq f(x_2).$$

f ist injektiv, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in B$ **höchstens eine** Lösung besitzt. Dass es überhaupt keine Lösung gibt, ist durchaus erlaubt.

Den Nachweis der Injektivität einer Abbildung führt man meist durch Kontraposition, d.h. man zeigt: Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so ist $x_1 = x_2$.

Beispiele.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := ax + b$ (und $a \neq 0$) ist injektiv:

   Sei etwa $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist $ax_1 + b = ax_2 + b$, also $a(x_1 - x_2) = 0$. Da $a \neq 0$ vorausgesetzt wurde, muss $x_1 = x_2$ sein.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ ist nicht injektiv! Für $x \neq 0$ ist nämlich $-x \neq x$, aber $f(-x) = f(x)$.

Ist allgemein $f : A \to B$ eine Abbildung und $M \subset A$, so definiert man die ***Einschränkung*** von f auf M (in Zeichen: $f|_M$) als diejenige Abbildung von M nach B, die durch $(f|_M)(x) := f(x)$ gegeben wird.

Ist $f(x) = x^2$ und $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, so ist $f|_M$ jetzt injektiv, denn wenn $f(x) = f(y)$ ist, dann ist $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, also $x = y$.

3. Die Abbildung $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathscr{P}$, die jeder natürlichen Zahl ihren kleinsten Primteiler zuordnet, ist nicht injektiv, denn es ist z.B. $f(6) = f(8) = 2$ oder $f(15) = f(39) = 3$.

4. Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(n) := 2n$ ist injektiv. Ist nämlich $2n = 2m$, so ist auch $n = m$. Im übrigen ist f Einschränkung einer linearen Funktion auf $\mathbb{Z}$.

   Allgemein gilt: Ist $f : A \to B$ injektiv und $M \subset A$, so ist auch $f|_M$ injektiv. Ist umgekehrt $f|_M$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.

Abbildungen, die sowohl injektiv als auch surjektiv sind, bei denen also die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in B$ eindeutig lösbar ist, sind etwas besonderes.

Definition

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt ***bijektiv*** oder ***umkehrbar***, falls sie injektiv **und** surjektiv ist.

Von den oben betrachteten Abbildungen sind nur $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := ax + b$ (und $a \neq 0$) und $f : \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) := x^2$ bijektiv.

Wenn es zwischen A und B eine bijektive Abbildung gibt, so ist nicht nur jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zugeordnet, sondern umgekehrt auch jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$, nämlich die eindeutig bestimmte Lösung x der Gleichung $f(x) = y$. In Gedanken können wir die Elemente von A und B so durch Pfeile miteinander verbinden, dass bei jedem $x \in A$ genau ein Pfeil startet und bei jedem $y \in B$ genau ein Pfeil ankommt. Das ergibt automatisch auch eine bijektive Abbildung von B nach A, die sogenannte „Umkehrabbildung“.

Definition

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so bezeichnet man die ***Umkehrabbildung*** mit f^{-1}.

Ist $f : A \to B$ surjektiv und $f^{-1} : B \to A$ die Umkehrabbildung, so ist $(f^{-1} \circ f) = \mathrm{id}_A$ und $(f \circ f^{-1}) = \mathrm{id}_B$. Darüber hinaus gilt sogar:

4.4.1 Satz *Eine Abbildung $f : A \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gibt, und dann ist $g = f^{-1}$.*

BEWEIS: 1) Ist f bijektiv, so setze man einfach $g := f^{-1}$.

2) Das Kriterium sei erfüllt.

a) Sei $b \in B$ vorgegeben. Dann ist $g(b) \in A$ und $f(g(b)) = b$. Also ist f surjektiv.

b) Sei $f(a_1) = f(a_2)$. Dann ist $a_1 = g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) = a_2$. Also ist f auch injektiv und damit bijektiv.

Aus (a) folgt auch, dass $g = f^{-1}$ ist (wegen der Gleichung $f(g(b)) = b$). ■

Das Symbol f^{-1} birgt in sich eine gewisse Verwechslungsgefahr. Ist $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung und $y \in B$, so kann man die Urbildmenge $f^{-1}(\{y\})$ bilden. Ist f sogar *bijektiv*, so existiert aber auch die Umkehrabbildung f^{-1}, und die kann auf y angewandt werden. Das Ergebnis $f^{-1}(y)$ ist dann ein **Element** von A und sollte möglichst nicht mit der **Menge** $f^{-1}(\{y\})$ verwechselt werden. Groß ist der Unterschied in diesem Falle allerdings nicht, es ist $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Ist f aber **nicht** bijektiv, so kann die Menge $f^{-1}(\{y\})$ leer sein oder aus mehreren Elementen bestehen, während $f^{-1}(y)$ als Element gar nicht existiert.

Definition

Eine Menge M heißt endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f : \{1, \dots, n\} \to M$ gibt.

Zwischen zwei beliebigen Mengen braucht es keine bijektiven Abbildungen zu geben, insbesondere kann man zeigen:

4.4.2 Satz *Sind n, m zwei verschiedene natürliche Zahlen, so gibt es keine bijektive Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, m\}$.*

Bei unendlichen Mengen tritt nun ein eigenartiger Effekt ein. Wir betrachten als Beispiel die Abbildung $f : \mathbb{N} \to U := \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ mit $f(n) := 2n$. Diese Abbildung ist injektiv und surjektiv, also bijektiv. Es gibt auch eine Umkehrabbildung, nämlich $f^{-1}(y) := y/2$. Und das, obwohl U eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen bietet ein Maß für eine ganze Klasse von unendlichen Mengen:

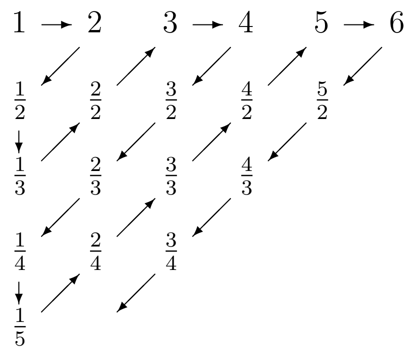
Definition

Eine Menge M heißt ***abzählbar***, falls es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. Ist M weder endlich noch abzählbar, so heißt M ***überabzählbar***.

Die Menge $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. Das sieht man, wenn man sie in folgender Form anordnet: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ Etwas überraschender ist das folgende Ergebnis:

4.4.3 Satz *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis: Man verwendet das sogenannte ***Cantor'sche Diagonalverfahren***:



Durchläuft man das obige Diagramm entlang der Pfeile und lässt man dabei die überflüssigen Zahlen weg, so erhält man eine Abzählung der positiven rationalen Zahlen. Fügt man nun (wie bei $\mathbb{Z}$) am Anfang die 0 und hinter jedem q sofort die Zahl $-q$ ein, so erhält man eine Abzählung aller rationalen Zahlen. ■

Wie steht es aber jetzt mit den reellen Zahlen? Hier folgt erstaunlicherweise:

4.4.4 Satz *Die Menge* $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ *ist* ***nicht abzählbar***.

Beweis: Wir setzen als bekannt voraus, dass sich jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 als unendlicher Dezimalbruch der Form $0.a_1a_2a_3\ldots$ schreiben lässt. Der Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ wird nun durch Widerspruch geführt. Könnte man die reellen Zahlen nämlich abzählen, so hätte man eine Folge

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.\mathbf{a_{11}}a_{12}a_{13}\ \ldots\ , \\ x_2 &= 0.a_{21}\mathbf{a_{22}}a_{23}\ \ldots\ , \\ x_3 &= 0.a_{31}a_{32}\mathbf{a_{33}}\ \ldots\ , \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

In dieser Folge müssten **alle** reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorkommen (die Ziffern a_{ij} nehmen dabei wie üblich Werte zwischen 0 und 9 an).

Nun wird eine reelle Zahl $y = 0.c_1c_2c_3\ldots$ wie folgt konstruiert:

$$\text{Es sei} \quad c_i := \begin{cases} 5 & \text{falls } a_{ii} \neq 5 \\ 4 & \text{falls } a_{ii} = 5 \end{cases}$$

Auch y liegt zwischen 0 und 1 und muss unter den Folgegliedern $x_1, x_2, x_3, \ldots$ vorkommen. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $y = x_n$ ist. Dann ist $c_n = a_{nn}$, was einen Widerspruch zur Definition der c_i ergibt. ■

Obwohl also $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ allesamt unendliche Mengen sind, gibt es doch noch einen qualitativen Unterschied zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ auf der einen und $\mathbb{R}$ auf der anderen Seite. In einem allerdings schwer fassbaren Sinne gibt es „viel mehr“ irrationale als rationale Zahlen.