2 Die Regeln der Algebra

2.1 Die reellen Zahlen

Was versteht man unter reellen Zahlen? Die unendlichen Dezimalbrüche liefern eine ganz gute Vorstellung von ihnen, und das Rechnen mit solchen Dezimalbrüchen ist jedem vertraut, allerdings nur im Falle von endlich vielen Nachkommastellen. Vom wissenschaftlichen Standpunkt aus ist das noch nicht befriedigend. Es gibt zwei Möglichkeiten, zu einem solideren Fundament zu kommen.

1. Man kann die reellen Zahlen aus schon bekannten Dingen **konstruieren**, etwa indem man aus den natürlichen Zahlen schrittweise die Zahlenbereiche $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ aufbaut, und schließlich die reellen Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen konstruiert. Dieser Weg ist mühselig und zeitaufwändig, ich werde nur am Ende des Kurses kurz darauf eingehen.

2. Deutlich kürzer ist die **axiomatische Einführung**. Ein Axiomensystem muss nicht erklären, was reelle Zahlen sind, es muss nur ihre Eigenschaften beschreiben. Dazu gehört:

   (a) Reelle Zahlen können wie üblich addiert und subtrahiert werden.

   $a + (b + c) = (a + b) + c$ und $a + b = b + a$. Es gibt ein Null-Element $0 \in \mathbb{R}$, so dass $a + 0 = a$ für alle a gilt, und zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es das Negative $-a$ mit $a + (-a) = 0$. Statt $a + (-b)$ schreibt man auch $a - b$.

   (b) Reelle Zahlen können nach den üblichen Regeln multipliziert und dividiert werden. Dazu gehört auch das Verbot, durch Null zu dividieren.

   $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ und $a \cdot b = b \cdot a$. Es gibt ein Eins-Element $1 \neq 0$, so dass $a \cdot 1 = a$ für alle a gilt, und zu jedem $b \neq 0$ gibt es ein Inverses b^{-1} mit $b \cdot b^{-1} = 1$. Statt $a \cdot b^{-1}$ schreibt man auch a/b. Wie man sieht, wird für die Null kein Inverses verlangt. Weiter unten zeigen wir, dass es tatsächlich ein solches Inverses nicht geben kann.

   (c) Es gilt das Distributivgesetz, durch das eine Verbindung zwischen Addition und Multiplikation hergestellt wird.

   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

   (d) Die reellen Zahlen können ihrer Größe nach angeordnet werden, so dass man „positive“ Zahlen auszeichnen kann. Summe und Produkt positiver Zahlen sind wieder positiv.

   Ist a eine reelle Zahl, so ist entweder $a > 0$, $-a > 0$ oder $a = 0$. Sind $a, b > 0$, so ist $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$. Statt $b - a > 0$ schreibt man auch $a < b$.

   (e) Es gilt das Vollständigkeitsaxiom, das besagt, dass die reellen Zahlen ein Kontinuum bilden, also keine Lücken besitzen. Dieses Axiom werden wir erst in Kapitel 5 ausführlich besprechen.

   Mengen mit (a), (b) und (c) nennt man „Körper“. Neben den reellen Zahlen bildet auch die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen einen Körper. Und es gibt auch sehr exotische Beispiel wie etwa den Körper $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$. In ihm wird wie üblich multipliziert, und es kommt die überraschende Additionsregel $1+1=0$ hinzu. Gilt neben (a), (b) und (c) auch noch (d), so spricht man von einem „angeordneten Körper“. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind angeordnet, nicht aber der Körper $\mathbb{F}_2$ (denn die Eins ist immer positiv, und dann müsste auch $0 = 1+1$ positiv sein, was nicht sein kann). Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms (e) wird aus einem angeordneten Körper der Körper der reellen Zahlen.

Um nun weitere Aussagen über reelle Zahlen zu erhalten, muss man diese beweisen.

Der einfachste Typ eines Beweises ist der **direkte Beweis**. Dabei handelt es sich um eine Abfolge von Implikationen (also logischen Folgerungen $\mathscr{A} \implies \mathscr{B}$), an deren Anfang die Axiome, alle Voraussetzungen und alle schon bewiesenen Sätze stehen. Am Ende steht die zu beweisende Aussage.

Beispiel.

Für beliebige reelle Zahlen a, b, c soll die Aussage „$a > b \implies a + c > b + c$“ bewiesen werden. Der Beweis könnte folgendermaßen aussehen:

(1) $a > b \implies a - b > 0$. Das ergibt sich aus der Definition von „$a > b$“.

(2) Es ist $(a+c) - (b+c) = (a-b) + (c-c) = a - b > 0$. Das ergibt sich aus den Rechenregeln von $\mathbb{R}$ und dem Ergebnis von (1).

(3) Es ist $a + c > b + c$ (nach Definition und Aussage (2)).

Bemerkung: Die Gleichungskette in (2) ist eine stark abgekürzte Schreibweise für die folgende Kette von Implikationen:

$$\begin{aligned} c - c = 0 \quad &\implies \quad (a-b) + (c-c) = a - b \\ &\implies \quad (a-b) + (c-c) > 0 \text{ (wegen (1))} \\ &\implies \quad (a+c) - (b+c) > 0 \text{ (nach den Rechenregeln von } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel ist der (in der Vorlesung nicht behandelte) Beweis von

2.1.1 Satz *Für $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $a + x = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung.*

BEWEIS: Zum Beweis der Existenz muss man nur die Lösung angeben und die „Probe“ machen: Sei $x := (-a) + b$. Dann ist

$$a + x = a + \big((-a) + b\big) = \big(a + (-a)\big) + b = 0 + b = b + 0 = b.$$

Es gibt also eine Lösung x. Ist nun y irgend eine Lösung (von der wir noch nicht wissen, ob sie mit x übereinstimmt oder nicht), so gilt:
$y = 0 + y = \big(a + (-a)\big) + y = (-a) + \big(a + y\big) = (-a) + b = (-a) + (a + x) = \big(a + (-a)\big) + x = 0 + x = x$. Es gibt also tatsächlich nur eine Lösung. ∎

Dieser Satz ist sehr nützlich, wenn man einige andere (eigentlich selbstverständlich erscheinende) Aussagen beweisen will, zum Beispiel:

2.1.2 Satz *Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x \cdot 0 = 0$.*

BEWEIS: Es ist $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$ und $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung $x \cdot 0 + y = x \cdot 0$ muss $y = 0 = x \cdot 0$ sein. ∎

2.1.3 Satz *Es ist $(-1) \cdot (-1) = 1$.*

BEWEIS: Es ist $(-1) + (-1) \cdot (-1) = (-1) \cdot (1 + (-1)) = (-1) \cdot 0 = 0$ und $(-1) + 1 = 1 + (-1) = 0$. ∎

2.1.4 Satz *Es ist $-(-a) = a$ und $-(a + b) = (-a) + (-b)$.*
Außerdem gilt: $(-1) \cdot a = -a$.

BEWEIS: Zur ersten Gleichung: Es ist $(-a) + (-(-a)) = 0$ und $(-a) + a = a + (-a) = 0$.

Zur zweiten Gleichung: Es ist $(a+b)+(-(a+b)) = 0$ und $(a+b)+((-a)+(-b)) = (b + (a + (-a))) + (-b) = (b + 0) + (-b) = b + (-b) = 0$.

Und auch bei der dritten Gleichung funktioniert es so. Es ist $a + (-a) = 0$ und $a + (-1) \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = 0$. ∎

Zurück zu den in der Vorlesung behandelten Themen! Wir beschäftigen uns mit weiteren Beweismethoden.

Ein relativ einfacher Beweistyp ist die **Fallunterscheidung**. Wenn die Voraussetzungen eines Satzes von einem Parameter x abhängen, der endlich viele Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annehmen kann, dann reicht es, für jeden Parameterwert einen eigenen Beweis zu liefern. Weil dann der Wert von x als zusätzliche Information zur Verfügung steht, ist das einfacher, als einen Beweis für alle x zugleich zu führen. Statt um einzelne Werte kann es dabei übrigens auch um Wertemengen gehen.

Beispiel.

Wir verwenden die Bezeichnung $x^2 := x \cdot x$. Es soll gezeigt werden: Ist x eine reelle Zahl, so ist $x^2 \geq 0$.

Es liegt nahe, folgende drei Fälle zu betrachten: $x = 0$, $x > 0$ und $x < 0$.

1. Ist $x = 0$, so ist $x^2 = x \cdot x = 0$.
2. Ist $x > 0$, so folgt aus den Anordnungsaxiomen, dass $x^2 = x \cdot x > 0$ ist.
3. Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$ und $x^2 = (-1) \cdot (-1) \cdot x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$.

Ein **indirekter Beweis** oder **Beweis durch Widerspruch** ist deutlich komplizierter als ein direkter Beweis oder ein Beweis durch Fallunterscheidung. Um eine Aussage $\mathscr{A} \implies \mathscr{B}$ zu beweisen, fügt man der Voraussetzung $\mathscr{A}$ noch eine weitere Voraussetzung hinzu, nämlich die „Annahme“ $\neg\mathscr{B}$. Es sollte nicht überraschen, dass man mit Hilfe von zwei Voraussetzungen leichteres Spiel als nur mit einer Voraussetzung hat. Aber das Ziel kann jetzt natürlich nicht die Aussage $\mathscr{B}$ sein, das wäre unsinnig. Stattdessen versucht man, durch eine mehr oder weniger umfangreiche Kette von Implikationen zu einer offensichtlich falschen Aussage $\mathscr{C}$ zu gelangen, dem „Widerspruch“.

Hat man beim Beweis $\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{C}$ alles richtig gemacht, so ist diese zusammengesetzte Implikation wahr. Weil $\mathscr{C}$ aber falsch ist und nur aus einer **falschen** Aussage eine falsche Aussage folgen kann, muss auch die Prämisse $\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B}$ falsch sein. Die ursprüngliche Voraussetzung $\mathscr{A}$ wird natürlich als wahr angesehen. Es bleibt nur der Ausweg, dass $\neg\mathscr{B}$ falsch ist. Und damit ist man am Ziel, $\mathscr{B}$ muss wahr sein. Quod erat demonstrandum! (Was zu beweisen war).

Beispiel.

Bewiesen werden soll die Aussage „$n \in \mathbb{N}$ und n^2 ungerade $\Longrightarrow n$ ungerade.“

Wir machen die Annahme „n gerade“. Das bedeutet, dass n ein Vielfaches von 2 ist: $n = 2k$. Dann ist $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$ auch ein Vielfaches von 2, also gerade. Da n nicht zugleich gerade und ungerade sein kann, ist damit ein Widerspruch erreicht. Die Annahme muss falsch sein, die Behauptung ist bewiesen.

In Wirklichkeit liegt hier ein Sonderfall vor. Die Aussagen $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ und $\neg\mathscr{B} \Longrightarrow \neg\mathscr{A}$ sind äquivalent, wie man sofort mit Hilfe einer Wahrheitstafel zeigen kann. Beweist man die zweite Implikation, so ist automatisch auch die erste Implikation bewiesen. Man spricht vom Prinzip der **Kontraposition**, das oft mit dem Widerspruchsprinzip verwechselt wird, aber weniger komplex ist. Bei einem echten Widerspruchsbeweis $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ werden beide Voraussetzungen $\mathscr{A}$ und $\neg\mathscr{B}$ verwendet, und der Widerspruch $\mathscr{C}$ muss nichts mit $\mathscr{A}$ zu tun haben.

Als besseres Beispiel soll jetzt für reelle Zahlen $a, b \geq 0$ die Ungleichung

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

bewiesen werden (die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel).

Die Prämisse $\mathscr{A}$ wird hier nicht explizit genannt. Vorausgesetzt wird das Rechnen mit (positiven) reellen Zahlen. Da $2 \cdot a = (1+1) \cdot a = 1 \cdot a + 1 \cdot a = a + a$ ist, gilt z.B. die bekannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Außerdem gibt es zu jeder positiven Zahl x die Quadratwurzel $\sqrt{x}$. Der Beweis dafür wird später mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms bewiesen werden.

Die Annahme $\neg\mathscr{B}$ ist hier die Aussage $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$.

Aus $\mathscr{A}$ und $\neg\mathscr{B}$ folgt nun $a + b < 2\sqrt{ab}$.

$$\Longrightarrow (a+b)^2 < 4ab \Longrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Longrightarrow (a-b)^2 < 0.$$

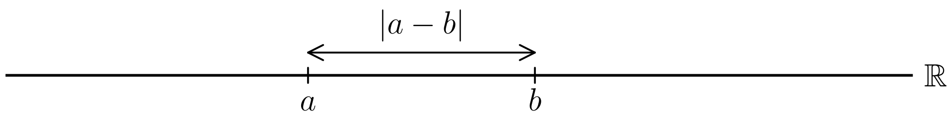
Die letzte Aussage ist offensichtlich falsch, ein Quadrat kann nicht negativ sein. Das ist der gewünschte Widerspruch, die Annahme muss falsch sein.

Definition

Ist $x \in \mathbb{R}$, so heißt $\quad |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$

der ***(Absolut-)Betrag*** von x.

Stellen wir uns die reellen Zahlen a, b als Punkte auf einer Geraden vor, so ist $|a - b| = |b - a|$ der Abstand von a und b auf der Geraden. Speziell ist $|a|$ der Abstand der Zahl a vom Nullpunkt.



2.1.5 Satz *Sind a, b, c reelle Zahlen, so gilt:*

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
2. *Es ist stets* $-|a| \leq a \leq +|a|$.
3. *Ist* $c > 0$*, so gilt:* $\quad |x| < c \iff -c < x < +c$.
4. *Es ist* $\quad |a + b| \leq |a| + |b|$ *(**Dreiecksungleichung**).*
5. *Es ist* $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Zum Beweis: (1) und (2) erhält man durch Fallunterscheidung ($a \geq 0$ und $a < 0$).

3) Es ist

$$\begin{aligned} |x| < c \quad &\iff \quad \big((x \geq 0) \wedge (x < c)\big) \vee \big((x < 0) \wedge (-x < c)\big) \\ &\iff \quad (0 \leq x < c) \vee (-c < x < 0) \\ &\iff \quad -c < x < c\,. \end{aligned}$$

4) Wegen (2) ist $-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$. Wegen (3) folgt daraus die Dreiecksungleichung.

Zum Beweis von (5) benutzt man den beliebten Trick, eine Null einzufügen:
Es ist $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. ∎

Definition

Ist $a < b$, so nennt man $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$ das ***abgeschlossene Intervall*** mit den Grenzen a und b, sowie $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$ das ***offene Intervall*** mit den Grenzen a und b.

2.2 Summenformeln

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) war sicher der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit. Dabei stammte er aus sehr einfachen sozialen Verhältnissen. Als er noch in Braunschweig die Volksschule besuchte, trug sich nach seinen eigenen Worten folgendes zu:

Der Lehrer, der eine große Klasse mit Schülern verschiedener Altersstufen zu betreuen hatte, stellte diesen die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, wohl um sie eine Weile zu beschäftigen. Doch nach kurzer Zeit trat der junge Gauß nach vorne an's Pult und zeigte dem Lehrer seine Tafel mit dem Ergebnis 5050.

Gauß hatte festgestellt, dass $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 50 + 51 = 101$ ist, also

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \;=\; \frac{100}{2} \cdot (100 + 1) \;=\; 50 \cdot 101 \;=\; 5050.$$

Das Verfahren klappt nicht nur bei $n = 100$, sondern sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Der BEWEIS funktioniert genau so, wie sich Gauß das im Falle $n = 100$ überlegt hatte.

Auf die Dauer wird die „Pünktchen"-Schreibweise für lange Summen lästig. Dagegen gibt es aber ein Mittel:

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede natürliche Zahl i mit $1 \le i \le n$ sei eine reelle Zahl a_i gegeben. Dann bezeichnet man die Summe aller dieser Zahlen a_i mit dem Symbol

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \Big(:= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \Big),$$

in Worten: ***Summe über*** $\mathbf{a_i}$ ***, für* i *von* 1 *bis* n**.

Die Bestandteile des Summenzeichens haben im einzelnen folgende Bedeutung:

$$\sum_{\text{Laufindex} \rightarrow\, i=1 \,\leftarrow\, \text{Untergrenze}}^{n \,\leftarrow\, \text{Obergrenze}} a_i \;\leftarrow\; \text{Summationsterm}$$

Der „Laufindex" i kann durch ein beliebiges anderes Symbol ersetzt werden. Das muss dann allerdings gleichzeitig an allen Stellen geschehen, wo i auftritt, z.B.

$$\sum_{p=1}^{n} a_p \quad \text{oder} \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \,.$$

Des weiteren sind folgende Manipulationen erlaubt:

1) **Beliebige Grenzen**: Sind $k, l \in \mathbb{Z}$, so ist

$$\sum_{i=k}^{l} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{l-1} + a_l.$$

Ist dabei $k > l$, so spricht man von der „leeren Summe“, und man vereinbart, dass diese immer $= 0$ ist.

2) **Aufteilung der Summe**: Ist $1 \leq m \leq n$, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad \text{(Assoziativgesetz).}$$

3) **Multiplikation mit einer Konstanten**: Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist

$$c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) \quad \text{(Distributivgesetz).}$$

4) **Summe von Summen**: Ist zu jedem i auch noch eine reelle Zahl b_i gegeben, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad + \quad \sum_{i=1}^{n} b_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \quad \text{(Kommutativgesetz).}$$

5) **Umnummerierung der Indizes**: Ist $m \in \mathbb{Z}$, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n+m-1} a_{j-m+1}.$$

Diese Formel ist etwas schwerer zu verstehen. Die n Terme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sollen addiert werden. Die Differenz aus Ober– und Untergrenze beträgt $n - 1$. Nun möchte man die Summe so umschreiben, dass der neue Laufindex j bei m startet. Als neue Obergrenze ergibt sich deshalb die Zahl $m + (n - 1)$, und man erhält dann eine Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{m+n-1} a_{j+k}, \text{ mit } m + k = 1, \text{ also } k = 1 - m.$$

Die Gauß’sche Formel sieht jetzt z.B. so aus: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Leicht erhält man noch weitere Summenformeln, etwa die Folgende:

2.2.1 Satz (über die Summe der ersten n ungeraden Zahlen)

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i-1) &= 2\cdot\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n \;=\; (n^2+n)-n \;=\; n^2.\end{aligned}$$

∎

2.3 Elementare Kombinatorik

Wir wollen zwei kleine kombinatorische Probleme betrachten:

Das erste Problem lautet:

> **Auf wie viele verschiedene Weisen lassen sich die ersten n natürlichen Zahlen anordnen?**

Um die Antwort zu finden, betrachten wir zunächst einige Spezialfälle.

Im Falle $\mathbf{n} = \mathbf{2}$ gibt es 2 Möglichkeiten, nämlich: $1-2$ und $2-1$.

Im Falle $\mathbf{n} = \mathbf{3}$ gibt es schon 6 Möglichkeiten, nämlich:

$$1-2-3,\;\; 1-3-2,\;\; 2-1-3,\;\; 2-3-1,\;\; 3-1-2 \;\text{ und }\; 3-2-1\,.$$

Beim zweiten Mal sind wir so vorgegangen: Jede der 3 Zahlen kann vorne stehen. Ist diese erste Zahl festgelegt, so bleiben für die beiden restlichen Zahlen jedesmal genau so viele Möglichkeiten, wie sich im Falle $n = 2$ ergeben hatten. Insgesamt sind das $3 \cdot 2 = 6$ verschiedene Anordnungen.

Allgemein kann man so weiterschließen: Will man n Zahlen anordnen, so kann jede der n Zahlen vorne stehen. Dann bleiben noch $n-1$ Zahlen übrig, von denen jede an zweiter Stelle stehen kann. Von den dann verbliebenen $n-2$ Zahlen kann jede an der 3. Stelle stehen usw. Insgesamt gibt es

$$n! := 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$$

(in Worten: „n ***Fakultät***“) Möglichkeiten, die ersten n Zahlen (oder n beliebige paarweise verschiedene Objekte) anzuordnen.

Das nächste kombinatorische Problem lautet:

Wie viele verschiedene Teilmengen mit k Elementen gibt es in einer Menge mit n Elementen?

Am Beispiel der Menge $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ testen wir erst mal einige einfache Fälle:

Im Falle $\mathbf{k = 1}$ erhalten wir die n Teilmengen

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \dots,\{n\}.$$

Im Falle $\mathbf{k = 2}$ ergeben sich die folgenden Teilmengen:

$$\begin{gathered}\{1,2\},\ \{1,3\},\ \dots,\{1,n\},\\ \{2,1\},\ \{2,3\},\ \dots,\{2,n\},\\ \vdots\\ \{n,1\},\ \{n,2\},\ ,\dots,\{n,n-1\}.\end{gathered}$$

Das sind $n(n-1)$ Mengen. Aber wir haben zu viel gezählt, mit jeder Menge $\{a, b\}$ kommt auch die Menge $\{b, a\}$ im obigen Schema vor, und diese beiden Mengen sind gleich. Also gibt es $n(n-1)/2$ zwei-elementige Teilmengen.

Im Fallle $\mathbf{k = 3}$ erhalten wir $n(n-1)(n-2)$ drei-elementige Teilmengen $\{a, b, c\}$, wobei aber jede dieser Teilmengen so oft auftaucht, wie oft man die Elemente a, b, c anordnen kann, also $3 \cdot 2 \cdot 1$-mal. Die gesuchte Anzahl ist demnach $n(n-1)(n-2)/3!$.

Nun sieht man, wie es weitergeht:

Zunächst kann man $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$-mal k angeordnete Elemente aus $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ heraussuchen. Jeweils $k!$ verschiedene Anordnungen ergeben jedoch die gleiche Menge. Die gesuchte Zahl ist also die Zahl

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Das neu eingeführte Symbol wird „n ***über*** k“ gesprochen. Man nennt diese Zahlen auch ***Binomialkoeffizienten***, aus einem Grund, der bald klar werden wird.

2.3.1 Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

1. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

2. $\displaystyle\binom{n}{1} = n \quad \textit{und} \quad \binom{n}{0} = 1.$

3. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$

Beweis: Die Aussage (1) ist trivial, ebenso die erste Aussage von (2). Die zweite Aussage von (2) ergibt sich aus der Tatsache, dass es nur *eine* leere Menge gibt. Die Aussage (3) muss man nachrechnen:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\\ &= \frac{k(n-1)!+(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \quad = \quad \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

∎

Beispiele.

1. Auf einer Party treffen sich 25 Personen, und jeder möchte jedem die Hand geben. Dann werden $\binom{25}{2}=\frac{24\cdot 25}{2}=300$ mal Hände geschüttelt.
2. Beim Zahlenlotto werden aus 49 nummerierten Kugeln zufällig 6 Kugeln ausgewählt. Das ergibt $\binom{49}{6}=\frac{44\cdot 45\cdot\ldots\cdot 49}{720}=13\ 983\ 816$ Möglichkeiten! Wenn Sie gerade dabei sind, Ihren Lottozettel auszufüllen, dann sollten Sie das noch einmal überdenken.

2.4 Die binomische Formel

Ist $a\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$, so ist $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{-mal}}$. Speziell ist $a^1=a$ und $a^{n+m}=a^n\cdot a^m$. Multpliziert man eine Zahl x mit einem Faktor a, so erhält man $x\cdot a^1=ax$. Multipliziert man x mit gar keinem Faktor, so ändert sich nichts: $x\cdot a^0=x$. Andererseits ist auch $x\cdot 1=x$. Deshalb setzt man $a^0:=1$. Und damit die Formel $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ auch für negative Potenzen gilt, setzt man $a^{-n}:=1/a^n$.

Es geht nun um die Formel, die zeigt, wie man ein ***Binom*** (d.h die Potenz einer Summe zweier Zahlen) als Summe von ***Monomen*** (d.h. einfachen Potenzen) schreiben kann:

2.4.1 *Seien $a,b\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

Beweis: Als erstes kann man ein paar einfache Fälle „zu Fuß“ berechnen:

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

2. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Dann überlegt man sich, dass das Produkt $(a+b)\cdots(a+b)$ eine Summe von Termen der Gestalt $a^i b^{n-i}$ ergibt. Jeder dieser Terme taucht genau so oft auf, wie man aus den n Faktoren i Faktoren auswählen kann. Und das ergibt schon die gewünschte Formel inklusive Beweis. ∎

Folgerung 2.4.2 *Eine Menge A von n Elementen besitzt genau 2^n verschiedene Teilmengen (inkl. A und $\varnothing$).*

Beweis: Die Anzahl ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^{n-k}\cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n$. ∎

Neben den binomischen Formeln $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ und $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ kennt jeder aus der Schule noch die nützliche Formel $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$, die auch als 3. binomische Formel bezeichnet wird. Sie ist ein Spezialfall einer allgemeinen Formel, genau wie die folgende geometrische Summenformel.

2.4.3 (Geometrische Summationsformel) *Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt:*

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

Beweis: Wir verwenden einen Trick, den man sich unbedingt für sein späteres Leben merken sollte. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n} a^i\right)\cdot(a-1) &= \sum_{i=0}^{n} a^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} a^i = \sum_{i=1}^{n+1} a^i - \sum_{i=0}^{n} a^i \\ &= a^{n+1} - a^0 = a^{n+1}-1.\end{aligned}$$

Da $a \neq 1$ vorausgesetzt wurde, darf man durch $(a-1)$ dividieren. ∎

Sissa, der legendäre Erfinder des Schachspiels, erbat sich von dem indischen König Shirham nur wenig als Belohnung: Er wollte $2^0 = 1$ Weizenkorn für das erste Feld, $2^1 = 2$ für das zweite, $2^2 = 4$ für das dritte, usw. und schließlich 2^{63} Körner auf das 64. Feld, das ergibt zusammen

$$1+2+4+8+\ldots+2^{63} = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64}-1.$$

$2^{64}-1$ ist eine Zahl mit 20 Stellen, und auf der ganzen Welt gab es nicht genug Getreide, um die Belohnung auszuzahlen.

Die geometrische Summenformel lässt sich folgendermaßen verallgemeinern:

2.4.4 (dritte binomische Formel) *Sind $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist*

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \cdot \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}.$$

Zum Beweis muss man nur die rechte Seite ausmultiplizieren. Es ergibt sich eine Wechselsumme, von der mit Ausnahme des ersten und des letzten Gliedes alles wegfällt.

Im Falle $n = 1$ ergibt sich die aus der Schule bekannte Formel.