1 Das logische Fundament

1.1 Der liebe Gott und die großen Steine

Der Begriff „Mathematik“ bedeutet ursprünglich: „Die Kunst des Lernens“. Heute verbinden wir Mathematik hauptsächlich mit Logik und abstraktem Denken. Sie findet in den meisten Wissenschaften Verwendung und besticht durch ihren universellen Wahrheits-Anspruch. 2000 Jahre alte mathematische Sätze sind heute noch genauso wahr wie neueste Ergebnisse aus der mathematischen Forschung. Diese scheinbare Unfehlbarkeit gibt es in keiner Naturwissenschaft, und sie beruht darauf, dass mathematische Lehrsätze immer das Ergebnis einer Kette von logischen Folgerungen sind. An der Logik zweifeln wir nicht, weil sie fest in unserer Sprache verankert ist. Allerdings gibt es Grenzfälle.

Als ich ein Kind war und noch gerne in den Religionsunterricht ging, wollte mich mein Vater, der eher ein Freigeist war, ein bisschen necken, und es entwickelte sich folgendes Gespräch:

„Der liebe Gott kann doch alles!?“
„Ja!“
„Kann der liebe Gott auch große Steine machen?“
„Ja, der liebe Gott kann alles machen!“
„Kann der liebe Gott auch sehr große Steine hochheben?“
„Ja!“
„Und kann denn der liebe Gott einen so großen Stein machen, dass er ihn nicht mehr hochheben kann?“
„??!!“

1.2 Der Satz des Pythagoras

In Ägypten und Mesopotamien war die Mathematik vor allem eine praktische Wissenschaft, anwendbar im Kaufmännischen, in der Vermessung und der Kriegskunst. Erst die Griechen begannen, Axiome aufzustellen, Sätze zu beweisen und abstrakte Gedankengebäude zu errichten. Sie näherten sich der Mathematik von zwei Seiten: Für die einen stand die positive, ganze Zahl im Mittelpunkt, als Symbol für die Harmonie der Welt. Das waren die Pythagoräer, ein sagenumwobener geheimer Orden um den Mathematiker Pythagoras (um 500 v.Chr.), ansässig auf Sizilien. Die anderen, angefangen bei Thales von Milet (um 600 v.Chr.) bis hin zu den Mitgliedern der berühmten Akademie des Philosophen Platon in Athen (um 400 v.Chr.), entwickelten aus dem praktischen Umgang mit Zirkel und Lineal nach und nach eine axiomatisch begründete Geometrie. Eines Tages trafen diese beiden Vorstellungen aufeinander, und es kam zum Eklat. Was war geschehen?

Fast jeder kennt den Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Was bedeutet diese Formel?

„Wenn a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks sind, in dem der Seite c ein rechter Winkel gegenüberliegt, dann ist $a^2 + b^2 = c^2$."

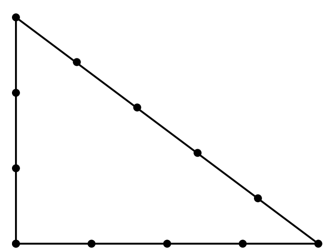
Mit einer gewissen Schul-Erfahrung versteht man diesen Satz. Aber es bleiben Fragen offen:

- Was ist ein Dreieck, was ein rechter Winkel, was das Quadrat einer Seite?
- Warum gilt die Formel? Und gilt sie denn wirklich immer?
- Stammt der Satz wirklich von Pythagoras?

Wir müssen in der Geschichte noch viel weiter zurückgehen.

Ab etwa 3000 v.Chr. etablierte sich in Ägypten entlang des Nils die erste Hochkultur, das „alte Reich". Die jährlichen Überschwemmungen des Nils schufen fruchtbare Anbaugebiete, die immer wieder neu vermessen werden mussten. Und auch beim Bau der Pyramiden waren umfangreiche geometrische Kenntnisse gefragt.

Da traten die sogenannten „Seilspanner" auf. Sie benutzten Seile mit Knoten in festen Abständen und spannten damit Dreiecke auf, z.B. mit Seitenlängen von 3, 4 und 5 Seilabschnitten. Sie wussten, dass sie so exakte rechte Winkel erzeugen konnten.



Was hier benutzt wird, ist natürlich nicht der Satz des Pythagoras, sondern seine Umkehrung: „Wenn bei einem Dreieck mit den Seiten a, b, c die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ besteht, dann ist der Winkel, der c gegenüberliegt, ein Rechter."

Dass diese Umkehrung gilt, ist keineswegs selbstverständlich, auch wenn Juristen manchmal mit solchen Umkehrungen argumentieren. Wir werden die Frage nach der Beweisbarkeit später stellen. Klar zu sein scheint jedoch, dass die Ägypter zu jener Zeit bereits den Satz des Pythagoras kannten.

Im Zweistromland zwischen Euphrat und Tigris gab es ähnliche Bedingungen wie im Niltal, was zur Entstehung einer weiteren Hochkultur führte. Die ursprünglichen Bewohner, die Sumerer, schufen um 3000 v.Chr. ein Reich, das nach und nach von den Babyloniern übernommen wurde, die von ihrer Hauptstadt Babylon aus etwa 1000 Jahre herrschten. Ihnen verdanken wir das Zwölfer-System, das wir noch heute in der Zeitrechnung und bei der Winkeleinteilung benutzen, und auch hier war der Satz des Pythagoras bekannt.

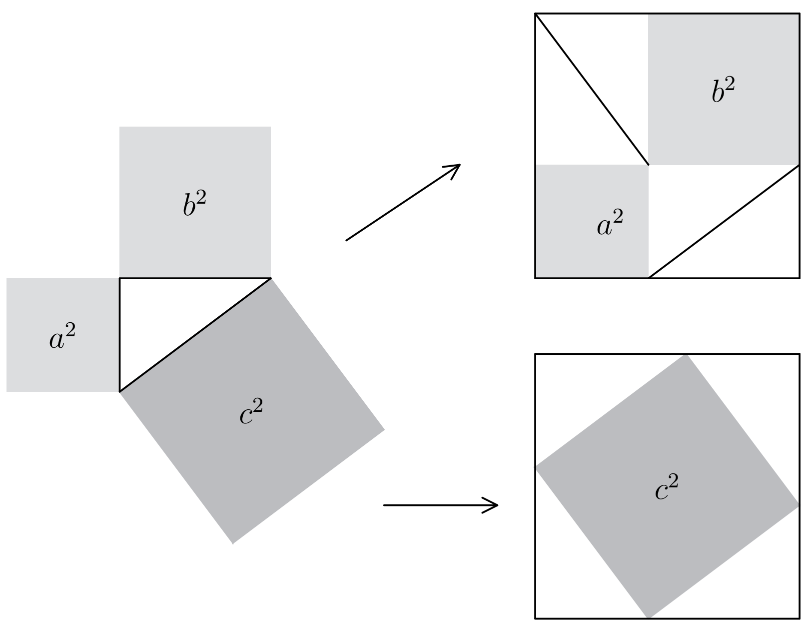
Um 300 v.Chr. entstand in der ägyptischen Stadt Alexandria eine Universität mit einer bemerkenswerten Bibliothek. Einer der ersten Lehrer dort war Euklid. Über sein Leben ist kaum etwas bekannt, aber die „Elemente“, seine Einführung in die Geometrie, wurde eines der einflussreichsten Lehrbücher aller Zeiten.

Der Satz des Pythagoras wird bei Euklid nicht als Formel $a^2 + b^2 = c^2$ beschrieben. Die größte Seite in einem rechtwinkligen Dreieck (die dann zwangsläufig dem rechten Winkel gegenüberliegt) heißt die ***Hypotenuse***, die beiden anderen Seiten nennt man ***Katheten***. Nun werden die Flächen der Quadrate untersucht, die man über der Hypotenuse und den zwei Katheten errichten kann.

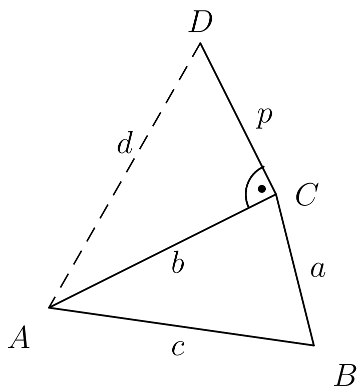
1.2.1 Euklids Proposition 47 (Der Satz des Pythagoras):
An einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse die gleiche Fläche wie die Quadrate über den Katheten zusammen.

Der von Euklid gegebene *Beweis* ist noch heute gültig, aber ein bisschen kompliziert. Mittlerweile benutzt man gerne einfachere Beweise, wie etwa den folgenden:

Ein Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$ setzt sich einerseits aus den Quadraten mit Seitenlänge a bzw. b und vier Exemplaren des rechtwinkligen Dreiecks zusammen, und andererseits – wie man rechts unten sieht – auch aus einem Quadrat der Seitenlänge c und vier Exemplaren des rechtwinkligen Dreiecks. Daraus folgt das gewünschte Ergebnis.



Auch der Beweis für die **Umkehrung des Satzes von Pythagoras** findet sich bei Euklid. In moderner Schreibweise lautet er: Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c (gegenüber A, B, C) und $a^2 + b^2 = c^2$. Man errichte in C die Senkrechte CD der Länge $p = a$ und verbinde A mit D. Das ergibt die Strecke d.

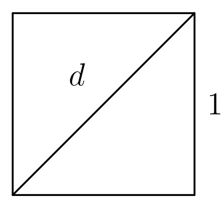


Es gilt (weil das Dreieck ACD rechtwinklig ist):

$$d^2 = b^2 + p^2 = b^2 + a^2 = c^2, \text{ also } d = c.$$

Nach dem Kongruenzsatz SSS ist nun ABC kongruent zu ACD. Das bedeutet, dass der Winkel bei C im Dreieck ABC auch ein Rechter sein muss.

Die Pythagoräer waren aufgrund ihrer Zahlenmystik der Meinung, dass das Verhältnis zweier Strecken immer rational (also ein Bruch zweier natürlicher Zahlen) sein müsse. Das sollte dann auch für die Diagonale d eines Quadrates der Seitenlänge 1 gelten.



Aber nach dem Satz des Pythagoras ist $d^2 = 1 + 1 = 2$, und man kann zeigen, dass es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat 2 ergibt. Wäre d rational, so könnte man d in der Form $d = p/q$ schreiben, mit zwei natürlichen Zahlen p und q. Und man könnte es so einrichten, dass der Bruch „gekürzt“ ist, dass also 1 der größte gemeinsame Teiler von p und q ist. Setzt man diese Darstellung von d in die Gleichung $d^2 = 2$ ein, so führt das auf die **ganzzahlige** Gleichung $p^2 = 2q^2$. Also ist p^2 eine gerade ganze Zahl. Jeder Primfaktor von p taucht in p^2 als Quadrat auf, und deshalb muss auch jeder Primfaktor von p^2 in p vorkommen. Das bedeutet, dass auch p gerade ist und in der Form $p = 2k$ (mit einem passenden Faktor k) geschrieben werden kann.

Setzt man jetzt diese Form von p in die Gleichung $p^2 = 2q^2$ ein, so erhält man $4k^2 = 2q^2$ und damit $2k^2 = q^2$. Mit der gleichen Argumentation wie oben erhält man daraus, dass q gerade ist. Wenn p und q als größten gemeinsamen Teiler die 1 besitzen, ist es aber unmöglich, dass beide Zahlen p und q gerade sind.

Dieser Widerspruch war für die Pythagoräer ein Skandal. Von da an gab man in der Mathematik der Logik den Vorrang vor der gefühlsmäßigen Intuition. Obwohl nun auch irrationale Zahlen in gewissem Sinne real geworden waren, gestand man ihnen aber auch weiterhin nur die Rolle eines Verhältnisses zweier Größen zu.

1.3 Cantors Mengenbegriff

Mehr als 2000 Jahre nach Euklid weigerten sich Mathematiker wie etwa Leopold Kronecker (1823 - 1891) immer noch, die Existenz irrationaler Zahlen anzuerkennen. Deshalb wandte sich Kronecker auch enttäuscht von seinem eigenen Schüler, Georg Cantor (1845 - 1918) ab, als dieser begann, sich mit den Grundlagen der Analysis zu beschäftigen.

Worin bestanden die ketzerischen Gedanken Cantors? Es beginnt ganz harmlos mit einer

Definition

Unter einer ***Menge*** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ***Elemente*** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Solche Zusammenfassungen gab es auch schon vor Cantor. Neu ist die Vorstellung von einer „Menge“ als einem neuen Objekt, mit dem man wieder weiterarbeiten und das man sogar als Element einer übergeordneten Menge benutzen kann. So, wie man ein einzelnes Haus als Menge seiner Bestandteile (Ziegel, Mörtel, Fenster, Leitungen usw.) auffassen kann, so kann man auch Ansammlungen von Häusern betrachten und erhält eine Ortschaft (ein Dorf, eine Stadt).

Ist x Element der Menge M, so schreibt man $x \in M$. Die Elemente müssen „wohlunterschieden“ sein, ein Eimer Wasser ist also keine Menge im mathematischen Sinn. Und hinter dem Wort „bestimmt“ versteckt sich die Vorstellung, dass die Objekte, die man zu einer Menge zusammenfassen will, zuvor schon mal irgendwie existieren müssen. Das wird wichtig werden, wenn man gewisse Paradoxa vermeiden will. Ansonsten können die Elemente so ziemlich alles sein, bunte Bausteine, abstrakte Zahlen oder auch einfach nur irgendwelche Gedanken. Da eine Menge durch ihre Elemente festgelegt wird, gibt es auch eine (und nur eine) Menge ohne Elemente. Dies ist die ***leere Menge*** $\varnothing$.

Zwei Mengen M und N heissen ***gleich*** (in Zeichen: $M = N$), wenn sie die gleichen Elemente besitzen. Besteht eine Menge M nur aus den Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so schreibt man: $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Will man auf diese Weise eine neue Menge einführen (also definieren), so verwendet man zusätzlich einen Doppelpunkt: $M := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Der Doppelpunkt steht auf der Seite des Gleichheitszeichens, auf der der Name des neuen Objekts steht (im Gegensatz zur Erklärung auf der anderen Seite).

Eine Menge T heißt ***Teilmenge*** der Menge M (in Zeichen: $T \subset M$), wenn jedes Element von T auch ein Element von M ist.

Mengen können unendlich viele Elemente besitzen, Beispiele dafür sind die Mengen

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{N} & = & \{1,2,3,4,\ldots\} \text{ (Menge der „natürlichen Zahlen“)}, \\ & \mathbb{N}_0 & = & \{0,1,2,3,4,\ldots\} \text{ (Menge der natürlichen Zahlen inklusive Null)} \\ \text{und} & \mathbb{Z} & = & \{0,+1,-1,+2,-2,+3,-3,\ldots\} \text{ (Menge der „ganzen Zahlen“)}. \end{array}$$

Wie man diese unendlichen Mengen exakt definiert, werden wir allerdings noch herausfinden müssen.

1.4 Formale Logik

Bevor wir uns mit Mengen im Detail beschäftigen können, müssen wir etwas über Logik lernen. Dass Logik auch ein Bestandteil unseres Alltags ist, kann man an folgendem Dialog erkennen:

Lara telefoniert mit ihrem Freund.
„Ich werde morgen nachmittags ins Freibad gehen.“
„Und was machst Du, wenn es regnet?“
„Dann gehe ich ins Kino und schaue den neuen Startrek-Film an.“
„Wenn Du also morgen nicht im Freibad bist, könnte ich Dich im Kino treffen.“
„Ja, wenn ich noch eine Karte erwische.“
„Und wenn nicht?“
„Dann gehe ich mit Janina im Mario einen trinken.“
„Wenn es also morgen regnet und ich Dich nicht bei Mario sehe, dann bist Du im Kino.“
„Das habe ich doch gesagt!“

In der (Aussagen-)Logik geht es um ***Aussagen***. Das sind grammatikalisch richtige Sätze, denen man (zumindest theoretisch) eindeutig einen Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zuordnet. Im obigen Gespräch taucht z.B. die Aussage „Ich werde morgen nachmittag ins Freibad gehen“ auf. Spätestens am Folgetag wird sich erweisen, ob diese Aussage wahr war. Wir führen die Abkürzung $\mathscr{A}$ für diese Aussage ein. Weitere Aussagen sind „Morgen regnet es“ (abgekürzt durch $\mathscr{B}$) und „Ich werde morgen ins Kino gehen“ (abgekürzt durch $\mathscr{C}$).

Die Aussage „Wenn es morgen regnet, werde ich ins Kino gehen“ ist eine logische Folgerung oder „Implikation“. Man schreibt: $\mathscr{B} \implies \mathscr{C}$. Lara wollte ihren Freund sicher nicht bewusst anlügen, also war die Folgerung für sie eine wahre Aussage. Nun gibt es 2 Möglichkeiten:

- Ist $\mathscr{B}$ wahr, so muss auch $\mathscr{C}$ wahr sein, sonst wäre die Impliktion falsch.

- Ist $\mathscr{B}$ falsch (weil morgen die Sonne scheint), so hat Lara auf jeden Fall die Wahrheit gesagt, denn in diesem Falle spielt es keine Rolle, ob $\mathscr{C}$ zutrifft. Wir können die Fälle in einer sogenannten Wahrheitstafel zusammenfassen:

$\mathscr{B}$	$\mathscr{C}$	$\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{C}$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Man kann sich merken: Aus einer falschen Aussage kann man alles folgern.

Neben der Implikation gibt es noch andere, einfachere Verknüpfungen von logischen Aussagen. Ist $\mathscr{A}$ eine Aussage, so ist $\neg\mathscr{A}$ („**nicht** $\mathscr{A}$“) ihre logische ***Negation*** (also Verneinung). Der Wahrheitswert wird bei der Negation einfach umgekehrt. Die logische Verneinung der Aussage $x \in M$ ist die Aussage $x \notin M$. Die logische Verneinung der Aussage $M = N$ ist die Aussage $M \neq N$.

Sind $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ zwei Aussagen, so definiert man die ***Konjunktion*** $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ („$\mathscr{A}$ **und** $\mathscr{B}$“) und die ***Disjunktion*** $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ („$\mathscr{A}$ **oder** $\mathscr{B}$“) durch ihre Wahrheitstafeln:

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Konjunktion ist einfach zu verstehen. Sie ist genau dann wahr, wenn beide beteiligten Aussagen wahr sind. Die Disjunktion „oder“ entspricht nicht dem alltäglichen Gebrauch von „entweder – oder“, vielmehr handelt es sich um ein nicht-ausschließendes „oder“.

Beispiele.

1. Ich stand im Stau, und es regnete.

2. Zwei verschiedene Geraden in der Ebene sind parallel oder schneiden sich in einem Punkt.

3. Außer der 1 sind die Teiler von 72 gerade oder durch 3 teilbar (denn die Teiler sind die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, 12, 24, 36 und 72 und die ungeraden Zahlen 1, 3 und 9).

Verknüpft man Aussagen mit bekannten Wahrheitswerten zu komplizierteren Aussagen, so gewinnt man deren Wahrheitswerte wieder mit Hilfe von Wahrheitstafeln:

Beispiel.

Die Aussage $\mathscr{B} \vee (\neg\mathscr{A})$:

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\neg\mathscr{A}$	$\mathscr{B} \vee (\neg\mathscr{A})$
w	w	f	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Die Verteilung der Wahrheitswerte stimmt überraschenderweise exakt mit der einer Implikation überein.

Wenn zwei Aussagen den gleichen Wahrheitswert besitzen, nennt man sie ***äquivalent*** (in Zeichen $\mathscr{A} \iff \mathscr{B}$).

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \iff \mathscr{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Bei einfachen Aussagen sieht das relativ langweilig aus. Zwei wahre Aussagen sind automatisch äquivalent, völlig unabhängig vom Inhalt der Aussagen. Bei zusammengesetzten Aussagen wird es schon interessanter. Wir haben oben gerade die Äquivalenz $(\mathscr{A} \implies \mathscr{B}) \iff \big(\mathscr{B} \vee (\neg\mathscr{A})\big)$ kennengelernt.

Wir interessieren uns hier natürlich vor allem für mathematische Aussagen wie „5 ist eine Primzahl“ oder „$17 + 4 = 4 + 17$“. Solche Aussagen sind aber ziemlich langweilig. Interessanter sind Aussagen wie „x gerade $\implies$ x^2 gerade“ oder Gleichungen wie $3x+5 = 17$. Nur sind das eigentlich keine Aussagen, denn sie enthalten eine Variable x, und ihr Wahrheitswert hängt davon ab, welchen Wert x annimmt. Ein Satz, der formal wie eine Aussage aussieht, aber eine (oder mehrere) Variable enthält, wird als ***Aussageform*** bezeichnet.

1. „$3x + 5 = 17$“ wird z.B. falsch für $x = 1$ und für $x = 5$, aber wahr für $x = 4$.

2. „x gerade $\implies$ x^2 gerade“ bleibt immer wahr. Ist $x = 2k$ eine gerade Zahl, so ist $x^2 = 2(2k^2)$ ebenfalls gerade. Die Folgerung stimmt also in diesem Fall. Setzt man für x eine ungerade Zahl ein, so ist die ***Prämisse*** (die linke Seite der Implikation) falsch, und aus einer falschen Aussage kann man bekanntlich alles folgern. Auch dann stimmt die Folgerung. Allerdings sollte man eigentlich vorher festlegen, aus welchem Bereich oder welcher Menge die die Zahlen, die man für x einsetzt, gewählt werden können.

Es gibt zwei einfache Methoden, aus einer Aussageform $\mathscr{A}(x)$ eine Aussage zu machen, die dann wahr oder falsch sein kann. Man benutzt sogenannte ***Quantoren***.

„$\forall\, x \in M \,:\, \mathscr{A}(x)$“ bedeutet: ***Für alle*** $x \in M$ ist $\mathscr{A}(x)$ wahr.

„$\exists\, x \in M \,:\, \mathscr{A}(x)$“ bedeutet: ***Es gibt*** (wenigstens) ein $x \in M$, für das $\mathscr{A}(x)$ wahr ist.

Beispiele.

1. Ist $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen, so ist die Aussage „$\forall\, x \in \mathbb{Z} \,:\, x$ gerade $\implies$ x^2 gerade“ wahr.

2. Die Aussage „$\exists\, x \in \mathbb{Z} \,:\, 3x + 5 = 17$“ ist ebenfalls wahr.

Im ersten Fall muss man einen allgemeinen Beweis führen (der in der Regel mit dem Satz „Sei x beliebig vorgegeben“ beginnen sollte). Im zweiten Fall reicht es, ein Beispiel anzugeben (hier speziell $x = 4$). Es ist allerdings auch erlaubt, dass es mehrere Beispiele gibt.

Als praktische Anwendung des Erlernten betrachten wir die Lösung einer quadratischen Gleichung.

Vorgelegt sei die quadratische Gleichung $x^2+x-6 = 0$. Was bedeutet das? x^2+x-6 ist ein ***algebraischer Term*** mit einer Variablen x, und es soll die Lösungsmenge

$$L = \{x \,:\, x^2 + x - 6 = 0\}$$

bestimmt werden. Zu diesem Zweck formt man am besten die quadratische Gleichung so lange um, bis sie die Form $x = \ldots$ angenommen hat. Dabei können die Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen angewandt werden, z.B. die binomische Formel $(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$, aber auch Regeln der Art $x = y \iff x+a = y+a$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
x^2 + x - 6 = 0 \quad &\iff \quad x^2 + x = 6 \\
&\iff \quad x^2 + 2 \cdot (x/2) + (1/4) = 6 + 1/4 \\
&\iff \quad (x + (1/2))^2 = (25/4) \\
&\iff \quad (x + 1/2 = 5/2) \vee (x + 1/2 = -5/2) \\
&\iff \quad (x = 2) \vee (x = -3).
\end{aligned}$$

Also ist $L = \{2, -3\}$. Man kennt dieses Verfahren als Methode der quadratischen Ergänzung.

1.5 Axiomatik

Bis jetzt ist noch nicht so recht klar geworden, wie Mathematik funktioniert. Stellen Sie sich vor, Sie möchten Ihren Freund davon überzeugen, dass eine gewisse Aussage (A1) richtig ist! Wenn er zweifelt, werden Sie ihm stattdessen eine offensichtlichere Aussage (A2) anbieten, aus der (A1) logisch folgt. Wenn ihm auch das nicht reicht, werden Sie nach einer noch unbedenklicheren Aussage (A3) suchen, aus der wiederum (A2) folgt. Mit viel Geduld können Sie so eine beliebig lange Kette von Folgerungen aufbauen:

$$\ldots \implies (A_{n+1}) \implies (A_n) \implies \ldots \implies (A_3) \implies (A_2) \implies (A_1).$$

Das nennt man die deduktive Methode, aber so führt sie noch nicht zum Ziel. Irgendwann muss man bei Aussagen ankommen, die jeder als wahr akzeptiert. Eine solche Aussage nennt man ein ***Axiom***.

Zum Beispiel ist die Aussage „durch zwei Punkte geht genau eine Gerade“ ein Axiom der ebenen Geometrie.

Auf den ersten Blick ist das eine einfache, klare Aussage, die durch den Umgang mit dem Lineal täglich bestätigt wird. Also wird wohl niemand daran zweifeln. Und wenn doch? Die Axiome sind ein Teil der Regeln, nach denen das Spiel „Mathematik“ gespielt wird. Auch bei anderen Spielen können Zweifel auftreten, ob eine Regel gilt oder nicht. Wenn in einer Skatrunde nach verlorenem Grand-Hand und angesagtem Schneider Zweifel aufkommen, wie das Spiel gezählt werden soll, dann kann es zu Streitigkeiten kommen. Aber letztlich wird man in einem Regelbuch nachschlagen und sich an das halten, was dort ausgesagt wird. Und jeder, der sich mit einer bestimmten mathematischen Theorie beschäftigen möchte, muss auch die dafür festgelegten Axiome anerkennen. So sind die Spielregeln.

Ein anderes Problem tritt auf, wenn man das Beispiel näher betrachtet. Jeder weiß, was ein Punkt und was eine Gerade ist. Wirklich? Wie dick ist denn ein Punkt? Unendlich dünn? Was heißt „unendlich dünn“? Tatsächlich haben wir von den verwendeten Begriffen nur eine recht vage Vorstellung. Man muss sie erklären. Eine solche Erklärung nennt man eine ***Definition***. Aber in der Definition muss man ja wieder Wörter benutzen, und die müssen wieder definiert werden usw. Da tut sich erneut eine unendliche Kette auf, die zu nichts führt.

Wir müssen daher auch akzeptieren, dass gewisse Begriffe nicht definiert werden können. Solche Begriffe nennt man ***undefinierte Begriffe*** oder ***primitive Terme***. „Punkt“ und „Gerade“ wären z.B. solche primitiven Terme. Und es ist die Aufgabe der Axiome, die Eigenschaften der primitiven Terme festzulegen.

Ein klassisches Axiomensystem sieht nun folgendermaßen aus:

1. Zunächst werden die Grundbegriffe der Theorie festgelegt. Erklärungen der Grundbegriffe sind nicht Bestandteil der Theorie und dürfen später auch nicht verwendet werden.

2. Es wird eine Liste von Axiomen angegeben. Die Axiome sollten möglichst einfach gehalten werden, und über ihre Wahrheit sollte Einigkeit herrschen.

3. Alle anderen benötigten Begriffe werden mit Hilfe von Definitionen erklärt.

4. Alle weiteren Aussagen (Theoreme) werden aus den Axiomen oder aus vorher bewiesenen Aussagen logisch hergeleitet.

In einem modernen Axiomensystem tritt die Vorstellung von einem Spielregelsystem stärker in den Vordergrund. Man kann auf die Forderung verzichten, dass die primitiven Terme und die Axiome irgend eine reale und allgemein akzeptierte Situation beschreiben. Wichtiger ist die Widerspruchsfreiheit (und einige andere abstrakte Eigenschaften).

Beispiel.

Es geht darum, die Geometrie einer Baumschule zu verstehen. Die primitiven Terme sind „Baum“, „Reihe“ und „gehört zu“ (abgekürzt durch „$\in$“).

Axiom I: Jeder Baum gehört zu (wenigstens) einer Reihe, und zu jeder Reihe gehört ein Baum.

Axiom II: Zwei verschiedene Bäume gehören zu genau einer (gemeinsamen) Reihe.

Definition: Eine Reihe heißt zu einer anderen ***disjunkt***, falls kein Baum beiden gleichzeitig angehört.

Axiom III: Jede Reihe ist zu genau einer anderen Reihe disjunkt.

Soweit die primitiven Terme, Axiome und Definitionen. Natürlich wurden noch Begriffe aus der Logik benutzt, wie die Wörter „ein", „zwei", „beide", „genau" usw. Nun kann man einen Satz beweisen.

Satz 1: Jeder Baum gehört zu mindestens zwei Reihen.

Beweis: Es sei ein beliebiger Baum t gegeben. (Hypothese)

(1) Es gibt eine Reihe A mit $t \in A$ (nach Axiom I).
(2) Es gibt genau eine Reihe B, zu der A disjunkt ist (nach Axiom III).
(3) Sei $u \in B$ (Axiom I). Dann ist $u \neq t$ (weil A und B disjunkt sind).
(4) Es gibt genau eine Reihe C mit $t, u \in C$ (nach Axiom II).
(5) Da $u \in C$ und $u \notin A$ ist, ist $C \neq A$. (Logische Folgerung)
(6) Wir haben gezeigt, dass es zwei verschiedene Reihen A und C gibt, zu denen der Baum t gehört (Zusammenfassung).

Diese Folge von Implikationen ist ein Musterbeispiel für einen mathematischen Beweis.

1.6 Logik und Mengenlehre

Cantors Mengenlehre erntete früh Kritik. Er hatte sie erfunden, um eine solide Basis für den Umgang mit unendlichen Mengen zu gewinnen. Aber er begab sich damit auf ein gefährliches Pflaster.

Bei der Menge $M := \{x : x \notin x\}$ stellt sich die Frage, ob die Aussage $M \in M$ wahr ist. Wenn ja, dann kann man M in die Aussageform „$x \notin x$" einsetzen und erhält die Aussage $M \notin M$. Das ist ein Widerspruch. Ist aber $M \in M$ falsch, so darf man M nicht in „$x \notin x$" einsetzen, und die Aussage $M \notin M$ kann nicht gelten. Auch in diesem Fall erhält man einen Widerspruch. Erstmals wurde dieses Problem von dem britischen Philosophen Bertrand Russell formuliert:

> Es war einmal ein Dorfbarbier, der hängte in sein Fenster ein Schild mit folgender Aufschrift:
>
> „Ich rasiere jeden Mann im Ort, der sich nicht selbst rasiert!"
>
> Das ging so lange gut, bis ein Fremder in den Ort kam und ihn fragte, ob er sich denn selbst rasiere. „Ja", wollte der Barbier sagen, als ihm plötzlich Bedenken kamen. Rasierte er sich wirklich selbst, so dürfte er sich — des

Schildes wegen — nicht rasieren. Rasierte er sich aber nicht selbst, so müsste er sich eben doch rasieren.

Seit der Zeit vernachlässigte der Barbier sein Geschäft immer mehr, und wenn er nicht gestorben ist, dann grübelt er noch immer darüber nach, ob er sich nun rasieren soll oder nicht.

Es ist also ratsam, Regeln für die Bildung von Mengen festzulegen. 1908 stellte Ernst Zermelo, ein Schüler Cantors, erstmals ein Axiomensystem vor, das die Antinomien vermeidet.

Wir können das Zermelo'sche Axiomensystem hier nicht im Detail besprechen, das wäre viel zu schwer, aber wir wollen doch die wichtigsten Regeln für das Konstruieren von Mengen formulieren:

Regel 1:
Es gibt eine Menge, die kein Element enthält, die sogenannte ***leere Menge***, bezeichnet durch das Symbol $\varnothing$. Die Aussage „$x \in \varnothing$“ ist also für alle x falsch.

Regel 2:
Zwei Mengen M und N heissen ***gleich*** (in Zeichen: $M = N$), wenn sie die gleichen Elemente besitzen.

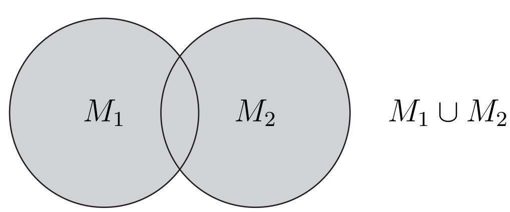
Regel 3:
Sind x und y zwei beliebige Objekte, so gibt es eine Menge $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, deren (einzige) Elemente x und y sind. Das macht es möglich, endlich viele verschiedene Elemente $x_1, \ldots, x_n$ zu einer Menge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ zusammenzufassen.

Regel 4:
Ist ein System $\mathscr{S}$ von Mengen gegeben, so existiert die ***Vereinigungsmenge***

$$\bigcup_{M \in \mathscr{S}} M = \{x \,:\, \exists\, M \in \mathscr{S} \text{ mit } x \in M\}.$$

Ist $\mathscr{S} = \{M_1, M_2\}$, so schreibt man: $\bigcup_{M \in \mathscr{S}} M = M_1 \cup M_2$. Dann ist

$$x \in M_1 \cup M_2 \iff x \in M_1 \textbf{ oder } x \in M_2 \text{ (oder in beiden Mengen).}$$



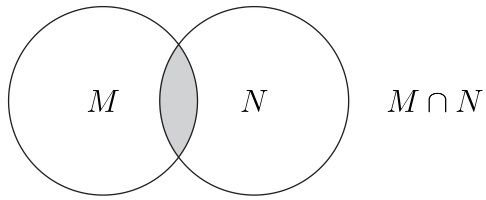
Regel 5:
Ist M eine Menge und $E(x)$ eine Eigenschaft, so existiert auch die Menge

$$T := \{x \in M \,:\, E(x)\}.$$

Ein Spezialfall ergibt sich, wenn die Eigenschaft $E(x)$ die Gestalt $x \in N$ hat, wenn also

$$T = M \cap N := \{x : x \in M \ \ \textbf{und} \ x \in N\}$$

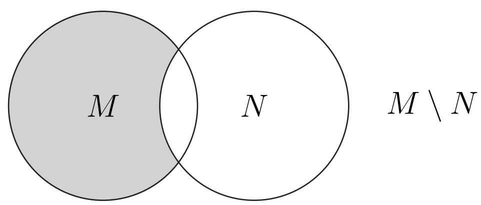
ist, die ***Schnittmenge*** (oder auch der ***Durchschnitt***) von M und N.



Sei $\mathscr{S}$ ein nicht leeres System von Mengen und $M_0 \in \mathscr{S}$. Dann existiert die ***Schnittmenge***

$$\bigcap_{M \in \mathscr{S}} M = \{x \in M_0 \,:\, \forall\, M \in \mathscr{S} \text{ ist } x \in M\}.$$

Die Menge $M \setminus N := \{x \in M \,:\, x \notin N\}$ nennt man die ***Differenz*** von M und N.



Regel 6:
Eine Menge N heißt bekanntlich ***Teilmenge*** der Menge M (in Zeichen „$N \subset M$“), wenn jedes Element von N auch Element von M ist. Nun gilt:

Zu jeder Menge M existiert deren ***Potenzmenge*** $\quad P(M) := \{X \,:\, X \subset M\}$.

Als Beispiel wollen wir sämtliche Teilmengen von $M := \{1, 2, 3\}$ bestimmen. Zunächst gehört die leere Menge dazu! Denn die Aussage $x \in \varnothing$ ist immer falsch, es ist also nichts zu überprüfen.

Geht man systematisch vor, so sucht man als nächstes nach den 1-elementigen Teilmengen, das sind $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$. Die 2-elementigen Teilmengen sind $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$. Und schließlich ist M auch Teilmenge von sich selbst. Damit gilt:

$$P(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\,\}.$$

Jede Menge besitzt eine Potenzmenge, also auch die leere Menge. Die Aussage „$\varnothing \subset \varnothing$“ ist wahr, weil die leere Menge in jeder Menge enthalten ist. Aber keine nicht leere Menge kann in der leeren Menge enthalten sein. Damit ist

$$P(\varnothing) = \{\varnothing\}.$$

Dies ist eine Menge mit einem Element. Nun treiben wir es auf die Spitze und bilden die Potenzmenge der Potenzmenge der leeren Menge. Das Ergebnis lautet:

$$P(P(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

Das ist eine Menge mit 2 Elementen! Und wenn wir das Verfahren noch einmal durchführen, so bekommen wir eine Menge mit 4 Elementen. Es ist offensichtlich, dass wir auf diesem Wege immer größere Mengen erhalten. Das motiviert die

Regel 7 (Unendlichkeitsaxiom):
Es gibt eine Menge U_0 mit folgenden Eigenschaften:

- $\varnothing \in U_0$.
- Mit $x \in U_0$ gehört auch $x \cup \{x\}$ zu U_0.

Wir nennen eine Menge $U \subset U_0$ eine ***Nachfolgermenge***, falls sie diese beiden Eigenschaften besitzt. Das Element $x^+ := x \cup \{x\}$ nennt man den ***Nachfolger*** von x. Ist $\mathscr{N}$ das System aller Nachfolgermengen, so existiert auch die „kleinste“ Nachfolgermenge

$$\mathbb{N}_0 := \bigcap_{U \in \mathscr{N}} U = \{x \in U_0 \,:\, x \text{ liegt in jeder Nachfolgermenge } \}.$$

Schreibt man 0 für die leere Menge, 1 für den Nachfolger $0^+ = \{\varnothing\}$, 2 für $1^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 3 für $2^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ usw., so ist

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

die ***Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null***.

Die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen (ohne Null) bezeichnet man mit $\mathbb{N}$.

Aus der Schule kennt man noch weitere unendliche Mengen, etwa

$$\begin{aligned} \text{Die Menge } \mathbb{Z} &:= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\} \text{ der ganzen Zahlen,} \\ \text{und die Menge } \mathbb{Q} &:= \{p/q \,:\, p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}\} \text{ der rationalen Zahlen.} \end{aligned}$$

Wie man diese Zahlensysteme exakt konstruieren kann, wird in Kapitel 7 gezeigt. Und es gibt ja noch mehr Zahlen. Alle Zahlen auf der Zahlengeraden bilden zusammen die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Dazu gehört $\sqrt{2}$ genauso wie die berühmte Kreiszahl π. Die reellen Zahlen sind Thema des nächsten Kapitels. Ihnen werden wir uns aber auf ganz andere Weise nähern.