3 Grenzwerte

Ist $x \in \mathbb{R}$, so ist $x^2 \geq 0$. Zu einer negativen Zahl a kann man also mit Sicherheit keine reelle Zahl x mit $x^2 = a$ finden. Wir werden uns in diesem Abschnitt u.a. damit beschäftigen, für welche **positiven** Zahlen a ein solches x existiert.

Wenn $a > 0$ ist und wenn es zwei Zahlen x und y mit $x^2 = y^2 = a$ gibt, dann ist $x^2 - y^2 = 0$, also auch $(x - y)(x + y) = 0$. Das bedeutet aber, dass entweder $x = y$ oder $x = -y$ sein muss. Wenn es überhaupt eine Lösung der Gleichung $x^2 = a$ gibt, dann gibt es sogar genau zwei Lösungen, und genau eine davon ist positiv! Wenn $a = 0$ ist, dann ist $x = 0$ die einzige Zahl mit $x^2 = a$.

Definition.
Sei $a \geq 0$ eine reelle Zahl. Wenn es eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$ gibt, dann nennen wir die eindeutig bestimmte reelle Zahl $c \geq 0$ mit $c^2 = a$ die *(Quadrat-)Wurzel* von a und schreiben:

$$\boxed{c = \sqrt{a}}$$

Es ist z. B. $\sqrt{0} := 0$ und $\sqrt{1.69} = 1.3$. Negative Zahlen besitzen keine Quadratwurzel.

Definition.
Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt $|x| := \sqrt{x^2}$ der *Betrag* von x.

Offensichtlich gilt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Z.B. ist $|37| = 37$, $|0| = 0$ und $|-3.1415| = 3.1415$.

Der Umgang mit Beträgen bereitet am Anfang gewisse Schwierigkeiten, deshalb wollen wir einige Standard–Situationen betrachten:

1. Lineare Gleichungen mit Beträgen.

Offensichtlich ist $\quad |x| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$

Für allgemeinere lineare Gleichungen wollen wir nur ein Beispiel angeben:

Gesucht sind alle reellen Zahlen x mit $|4x - 8| = 2$. Zur Lösung unterscheiden wir zwei Fälle:

a) $4x - 8 \geq 0 \iff x \geq 2$. Wir müssen also die Gleichung $4x - 8 = 2$ unter der Zusatzbedingung $x \geq 2$ lösen. Das ergibt $x = {}^5/_2$.

b) $4x - 8 < 0 \iff x < 2$. Jetzt müssen wir die Gleichung $-(4x - 8) = 2$ unter der Zusatzbedingung $x < 2$ lösen. Auch das ist möglich und ergibt $x = {}^3/_2$.

Die Gleichung hat also 2 Lösungen!

Man hätte übrigens genauso versuchen können, die quadratische Gleichung

$$(4x-8)^2 = 2^2, \text{ also } 16x^2 - 64x + 60 = 0,$$

zu lösen. Das Ergebnis ist das gleiche, allerdings werden wir uns mit quadratischen Gleichungen etwas später ausführlich beschäftigen.

2. Lineare Ungleichungen mit Beträgen.

Hier stellen wir zunächst einige Regeln zusammen:

Satz. *Es seien x, y und c reelle Zahlen, $c > 0$. Dann gilt:*

1. $|x| < c \iff -c < x < c.$
2. $|x| > c \iff (x < -c) \vee (x > c).$
3. *Es gilt die „Dreiecksungleichung“*

$$|x+y| \le |x| + |y|.$$

4. *Es ist* $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ *und* $|x^n| = |x|^n.$

Beweis: 1) Es ist

$$\begin{aligned} |x| < c &\iff [(x \ge 0) \wedge (x < c)] \vee [(x < 0) \wedge (-x < c)] \\ &\iff (0 \le x < c) \vee (-c < x < 0) \\ &\iff -c < x < c. \end{aligned}$$

2) Es ist

$$\begin{aligned} |x| > c &\iff [(x \ge 0) \wedge (x > c)] \vee [(x < 0) \wedge (-x > c)] \\ &\iff (x > c) \vee (x < -c). \end{aligned}$$

3) Für eine reelle Zahl a gilt allgemein:

$$a \le |a| \quad \text{und} \quad -|a| \le a.$$

Also ist $-|x| - |y| \le x + y \le |x| + |y|$. Wegen (1) ist dann $|x+y| \le |x| + |y|$.

4) $z := |x \cdot y|$ ist die eindeutig bestimmte nicht-negative Lösung der Gleichung $z^2 = x^2y^2$. Nun ist aber $|x| \cdot |y| \ge 0$ und $(|x| \cdot |y|)^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = x^2y^2$. Also muss $z = |x| \cdot |y|$ sein. ∎

Folgerung. *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$:*

$$|x-a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

BEWEIS: Es gilt:

$$\begin{aligned} |x-a|<\varepsilon &\iff -\varepsilon < x-a < +\varepsilon \\ &\iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon. \end{aligned}$$

■

Die Bedingung „ $|x-a|<\varepsilon$ “ bedeutet anschaulich, dass die Zahl x auf der Zahlengeraden von a um weniger als ε entfernt ist. Sie kann aber „links“ oder „rechts“ von a liegen.

Als Beispiel sollen alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|3x-6| \le x+2$ ermittelt werden.

Ist $3x-6 \ge 0$ (also $x \ge 2$), so soll $3x-6 \le x+2$ sein, also $x \le 4$.
Ist $3x-6 < 0$ (also $x < 2$), so soll $6-3x \le x+2$ sein, also $x \ge 1$. Damit ist

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : |3x-6| \le x+2\} &= \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x \le 4\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 4\}. \end{aligned}$$

Betrachten wir noch eine andere Ungleichung, etwa $|5-2x| \ge x+1$.

Ist $5-2x \ge 0$ (also $x \le 5/2$), so soll $5-2x \ge x+1$ sein, also $x \le 4/3$.
Ist $5-2x > 0$ (also $x > 5/2$), so soll $2x-5 \ge x+1$ sein, also $x \ge 6$.

In diesem Fall besteht die Lösungsmenge aus zwei nicht zusammenhängenden disjunkten Teilen, es ist
$\{x \in \mathbb{R} : |5-2x| \ge x+1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \le 4/3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \ge 6\}$.

Seien a und b reelle Zahlen, $a \le b$. Die Menge

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$$

nennt man das *abgeschlossene Intervall* mit den Endpunkten a und b. Es kann zu einem einzigen Punkt entarten.

Ist sogar $a < b$, so nennt man die Menge

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

das *offene Intervall* mit den Endpunkten a und b. Manchmal schreibt man auch $]a,b[$ dafür.

Es gibt auch noch die *halb offenen* Intervalle

$$[a,b) = \{x : a \le x < b\} \text{ und } (a,b] = \{x : a < x \le b\},$$

sowie die *unendlichen Intervalle*

$$\begin{aligned} (-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}, \\ (-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \\ [b,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \ge b\} \\ \text{und } (b,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > b\}. \end{aligned}$$

Auch $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ wird als unendliches Intervall bezeichnet.

Definition.
Eine reelle Zahl, die nicht in $\mathbb{Q}$ liegt, heißt *irrationale Zahl.*

Wir wissen, dass es keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ gibt. Wenn es eine reelle Zahl $x = \sqrt{2}$ mit dieser Eigenschaft gäbe, dann wäre das eine irrationale Zahl. Die Suche nach den Wurzeln hängt also zusammen mit der Frage: Ist $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$?

Wir bleiben erst mal bei der Frage, ob es eine reelle Zahl $x = \sqrt{2}$ gibt. Für die Antwort versuchen wir es erst mal mit der gängigsten Methode. Wir nehmen den Taschenrechner zur Hand, tippen auf die 2 und das Wurzel–Symbol. Mein Rechner behauptet:

$$\sqrt{2} = 1.\,4142136$$

Zur Probe quadriere ich diese Zahl wieder und erhalte als Ergebnis die Zahl

$$2.\,00000010642496\,.$$

Es scheint so, als ob mein Rechner auch nicht genau weiß, was $\sqrt{2}$ ist. Aber immerhin hat er mir einen ungefähren Wert verraten, so dass ich vielleicht $\sqrt{2}$ nach oben abschätzen kann. Die folgenden Ungleichungen lassen sich durch Quadrieren überprüfen:

$$\begin{array}{rcccl} 1 & < & \sqrt{2} & < & 2, \\ 1.4 & < & \sqrt{2} & < & 1.5, \\ 1.41 & < & \sqrt{2} & < & 1.42, \\ 1.414 & < & \sqrt{2} & < & 1.415, \\ 1.4142 & < & \sqrt{2} & < & 1.4143, \\ 1.41421 & < & \sqrt{2} & < & 1.41422. \end{array}$$

Dabei haben wir folgenden Satz benutzt:

Satz. *Seien a, b positive reelle Zahlen, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a^n < b^n.$$

BEWEIS: Wir zeigen zunächst für positive reelle Zahlen a, b, c, d:

Ist $a < b$ und $c < d$, so ist auch $a \cdot c < b \cdot d$.

Da alle Zahlen positiv sind, ist nämlich $ac < bc$ und $bc < bd$, also $ac < bd$.

Nun ist klar, dass aus $a < b$ auch $a^n < b^n$ folgt.

Ist umgekehrt $a^n < b^n$, so führen wir einen Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, dass $a \geq b$ ist. Dann folgt mit ähnlichen Überlegungen wie oben, dass auch $a^n \geq b^n$ sein muss, und das ist unmöglich! ∎

Zurück zur Approximation von $\sqrt{2}$:

Die Zahlen $c_1 := 2$, $c_2 := 1.5$, $c_3 := 1.42$, $c_4 := 1.415, \ldots$ stellen alle obere Schranken für die folgende Menge dar:

$$M := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 \leq 2\}.$$

Mit zunehmender Genauigkeit werden die Schranken immer kleiner. Nehmen wir für den Augenblick einmal an, die Menge S **aller** oberer Schranken besäße ein kleinstes Element c_0. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

1. Fall: Es ist $c_0^2 > 2$. Dann ist die Differenz $\delta = c_0^2 - 2$ eine sehr, sehr kleine positive Zahl, etwa von der Gestalt $\delta = 0.000\ldots 00z\ldots$, mit $z \neq 0$ und n Nachkommastellen davor, die verschwinden.

Jetzt suchen wir uns eine noch viel kleinere positive Zahl ε und berechnen $(c_0 - \varepsilon)^2 = c_0^2 - 2c_0\varepsilon + \varepsilon^2 = c_0^2 - \varepsilon(2c_0 - \varepsilon)$. Wir können ε sicher so klein wählen, dass die ersten $n+2$ Nachkommastellen von $\varepsilon(2c_0 - \varepsilon)$ verschwinden. Dann ist

$$\begin{aligned} \delta &\geq 0.000\ldots 00z000\ldots \\ \text{und } \varepsilon(2c_0 - \varepsilon) &\leq 0.000\ldots 000100\ldots\ , \end{aligned}$$

also

$$(c_0 - \varepsilon)^2 - 2 = \delta - \varepsilon(2c_0 - \varepsilon) \geq 0.000\ldots 00(z-1)900\ldots > 0.$$

Das bedeutet, dass $c_0 - \varepsilon$ immer noch eine obere Schranke von M ist. Das kann nicht sein, weil c_0 ja die kleinste obere Schranke sein sollte. Also kann dieser Fall nicht auftreten.

2. Fall: Es ist $c_0^2 < 2$. Dann kann man auf ähnliche Weise wie im 1. Fall zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass auch noch $(c_0 + \varepsilon)^2 < 2$ ist. Das bedeutet, dass c_0 keine obere Schranke von M ist. Auch dieser Fall kann nicht auftreten.

3. Fall: Es ist $c_0^2 = 2$. Wenn es eine kleinste obere Schranke c_0 für M gibt, muss sie diese Eigenschaft haben. Damit ist $c_0 = \sqrt{2}$.

Ist umgekehrt schon bekannt, dass $c_0 := \sqrt{2}$ existiert, so muss c_0 das größte Element von M sein. Das ist zugleich die kleinste obere Schranke von M. Wenn wir wollen, dass Wurzeln aus positiven reellen Zahlen existieren, müssen wir demnach fordern:

[**R-5**] **Vollständigkeits-Axiom**. Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke.

Definition.

Ist $M \subset \mathbb{R}$ nicht-leer und nach oben beschränkt, so versteht man unter dem *Supremum* von M (in Zeichen $\sup(M)$) die kleinste obere Schranke von M.

Beispiele:

$\sup[0,1] = \sup(0,1) = 1$, $\sup\{x \in \mathbb{R} \,:\, |3x - 6| \leq x + 2\} = 4$, $\sup\{(-1)^n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = 1$. Die leere Menge besitzt kein Supremum, und auch die unbeschränkte Menge $\mathbb{N}$ nicht.

Ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so nennt man die größte untere Schranke von M das *Infimum* von M (in Zeichen: $\inf(M)$). Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt, dass auch jede nach unten beschränkte nicht-leere Menge ein Infimum besitzt.

Satz von der Existenz der Quadratwurzel. *Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Dann gibt es eine reelle Zahl $c > 0$ mit $c^2 = a$.*

Der Beweis kann jetzt nach dem obigen Muster geführt werden. Dabei brauchen wir nicht mehr die Dezimalbruch-Darstellung, sondern nur das Vollständigkeits-Axiom und die beiden folgenden Sätze.

Wir können jetzt nämlich zeigen, dass die natürlichen Zahlen über jede reelle Schranke hinaus wachsen:

Der Satz des Archimedes.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \textit{mit} \quad n > x.$$

Beweis: Angenommen, es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $x_0 \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt.

Also existiert $a := \sup(\mathbb{N})$, die kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$. Dies ist eine reelle Zahl, und natürlich ist dann $a - 1$ keine obere Schranke mehr von $\mathbb{N}$. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - 1 < n_0$. Dann ist $n_0 + 1 > a$. Da $n_0 + 1$ eine natürliche Zahl ist, widerspricht das der Supremums-Eigenschaft von a. ∎

Folgerung.
Sei $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis:
Zu der reellen Zahl $\dfrac{1}{\varepsilon}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Da $\varepsilon > 0$ ist, ist $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. ∎

Auf die nochmalige Ausführung des Beweises von der Existenz der Quadratwurzel verzichten wir.

Als erste Anwendung der Wurzeln untersuchen wir jetzt die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung

$$\boxed{a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad (\text{mit } a \neq 0).}$$

Das Lösungsverfahren ist bekannt als „quadratische Ergänzung“. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \\ \iff \quad a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= 0 \\ \iff \quad x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} \\ \iff \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{1}{4a^2}(b^2-4ac). \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\Delta := b^2-4ac$ wird als *Diskriminante* bezeichnet. Man muss nun 3 Möglichkeiten unterscheiden:

1. Ist $\Delta < 0$, so kann die Gleichung mit keinem $x \in \mathbb{R}$ erfüllt werden.
2. Ist $\Delta = 0$, so muss auch $x+\dfrac{b}{2a}=0$ sein, und es gibt genau eine Lösung, nämlich $x=-\dfrac{b}{2a}$.
3. Ist $\Delta > 0$, so gibt es zwei Lösungen, nämlich

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.}$$

Beispiel.

In der Gleichung $2x^2-19x+9=0$ ist $a=2$, $b=-19$ und $c=9$. Also ist $\Delta=(-19)^2-8\cdot 9=361-72=289=17^2>0$. Es gibt daher zwei Lösungen

$$x=\frac{19\pm 17}{4}=\begin{cases} 36/4 &= 9 \\ 2/4 &= 1/2 \end{cases}$$

Wie sieht es nun mit quadratischen Ungleichungen aus?

Sei $c \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \{x\in\mathbb{R} : x^2<c\} &= \{x\in\mathbb{R} : (\sqrt{c})^2-x^2>0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} : (\sqrt{c}-x)(\sqrt{c}+x)>0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} : -\sqrt{c}<x<\sqrt{c}\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} : |x|<\sqrt{c}\}. \end{aligned}$$

Hingegen ist

$$\{x\in\mathbb{R} : x^2>c\}=\{x\in\mathbb{R} : x>\sqrt{c}\}\cup\{x\in\mathbb{R} : x<-\sqrt{c}\}.$$

Die allgemeine quadratische Ungleichung lässt sich mit der Methode der quadratischen Ergänzung auf solche reinquadratischen Ungleichungen zurückführen. So ist etwa

$$\begin{aligned} 2x^2 - 19x + 9 < 0 &\iff 2(x^2 - (19/2)x + 9/2) < 0 \\ &\iff x^2 - 2 \cdot (19/4)x + (19/4)^2 < (19/4)^2 - 9/2 \\ &\iff (x - 19/4)^2 < (19^2 - 72)/16 = (17/4)^2 \\ &\iff |x - 19/4| < 17/4 \\ &\iff -17/4 < x - 19/4 < 17/4 \\ &\iff 1/2 < x < 9. \end{aligned}$$

Und entsprechend ist

$$\begin{aligned} 2x^2 - 19x + 9 > 0 &\iff |x - 19/4| > 17/4 \\ &\iff (\, x - 19/4 < -17/4\,) \vee (\, x - 19/4 > 17/4\,) \\ &\iff (\, x < 1/2\,) \vee (\, x > 9\,). \end{aligned}$$

Als nächstes wenden wir uns „höheren" Wurzeln zu. Ähnlich wie im Falle $n = 2$ kann man auch für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ zeigen:

Ist $a > 0$ eine reelle Zahl, so existiert genau eine reelle Zahl $r > 0$ mit $r^n = a$.

Eine Besonderheit ist allerdings zu beachten: Ist $n = 2k$ *gerade*, so ist mit r stets auch $-r$ eine Lösung der Gleichung $x^n = a$. Ist $n = 2k + 1$ *ungerade*, so ist $(-r)^{2k+1} = -(r^{2k+1})$. In diesem Fall gibt es also nur *eine* Lösung für $x^n = a$, aber die Gleichung $x^n = -a$ besitzt ebenfalls eine (eindeutig bestimmte) Lösung.

Definition.

Sei $a \geq 0$ eine reelle Zahl, $n \in \mathbb{N}$. Die eindeutig bestimmte nicht-negative reelle Zahl r mit $r^n = a$ heißt die *n-te Wurzel von a*. Man schreibt dann:

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a}}$$

Ist n ungerade, so setzt man $\sqrt[n]{-a} := -\sqrt[n]{a}$.

Beispiel.

Es ist $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt{4} = 2$ und $-2 = -\sqrt{4}$.

Rechenregeln für Wurzeln.

1. *Für $a, b > 0$ ist* $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
2. *Für $a, b > 0$ ist* $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3. *Für $a > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ ist* $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

BEWEIS: 1) Ist $x^n = a$ und $y^n = b$, so ist $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n = a \cdot b$.

2) Es ist

$$\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{b \cdot \frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a}.$$

3) Sei $x^n = a^m$ und $y^n = a$. Dann ist $(y^m)^n = y^{m \cdot n} = (y^n)^m = a^m$. ∎

Achtung! Im allgemeinen ist $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

Beispiele.

1. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$.
2. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{22} = 2 \cdot \sqrt{33}$.
3. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}} = \dfrac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{3}$.

Da das Wurzelziehen eine Umkehrung zur Potenzbildung ist, liegt es nahe, folgende Schreibweise einzuführen:

Definition.
Ist $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, so schreibt man:

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} \quad \left(= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right).$$

Damit sind Potenzen a^q für jede rationale Zahl q erklärt und man kann leicht sehen, dass auch hierfür die Rechenregeln für Potenzen gelten. Das erleichtert den Umgang mit Wurzeln:

Beispiele.

1. Es ist $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$.
2. Es ist $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}}} = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3^4}}} = \sqrt[3]{3 \cdot 3^{\frac{4}{6}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{10}{6}}} = 3^{\frac{5}{9}} = \sqrt[9]{3^5}$.

Wir kommen jetzt zum Konvergenzbegriff.

Definition.
Eine Folge a_n reeller Zahlen heißt eine *Nullfolge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \text{ s.d. } \forall n \geq n_0 \text{ gilt: } |a_n| < \varepsilon.$$

Man schreibt dann:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \text{ („Limes für } n \text{ gegen Unendlich } \ldots).$$

Das ist gar nicht so einfach zu verstehen. Gemeint ist, dass die Zahlen a_n mit wachsendem n gegen Null „streben“. Das ist ein Vorgang, der normalerweise im Endlichen nie abgeschlossen werden kann. Aber damit wir etwas überprüfen können, muss es im Endlichen stattfinden. Deshalb formulieren wir dieses „Streben gegen Null“ als Dialog:

> Jedesmal, wenn Sie mir eine – beliebig kleine – Genauigkeitsgrenze $\varepsilon > 0$ vorgeben, dann kann ich Ihnen eine Nummer n_0 nennen, ab der alle Folgeglieder a_n vom Nullpunkt um weniger als ε entfernt sind. Dabei hängt n_0 (natürlich nicht eindeutig) von ε ab.

Sobald ε vorgegeben ist, betrachten wir nicht mehr alle Folgeglieder, sondern nur alle bis auf endlich viele Ausnahmen (am Anfang der Folge). Und das Intervall $U_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \varepsilon\}$ bezeichnet man als ε-Umgebung von 0. Man sagt dann auch: a_n konvergiert gegen 0, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ „fast alle Folgeglieder a_n in der ε-Umgebung von 0 liegen.

Beispiele.

1. Die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ wird durch die allgemeine Vorschrift $a_n := \frac{1}{n}$ definiert. Setzt man für n wachsende Zahlen ein, so wird a_n dem Betrag nach kleiner und kleiner. Ein riesiges n ergibt ein winziges a_n. Da sagt einem ja schon der gesunde Menschenverstand, dass die Folge gegen 0 konvergiert. Also versuchen wir, das zu beweisen!

   Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen ein n_0 finden, so dass a_n für $n \geq n_0$ weniger als ε von 0 entfernt ist. Da die Glieder a_n bei jedem Schritt kleiner werden, reicht es schon, ein einziges n_0 zu finden, so dass $a_{n_0} < \varepsilon$ ist. Wir wissen aber (von einer Folgerung aus dem Satz des Archimedes), dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ gibt. Für $n \geq n_0$ ist nun tatsächlich

   $$|a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon, \text{ also } \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Wir wollen zeigen: Ist $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, so ist $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

   Der Fall $q = 0$ ist trivial. Ist $0 < |q| < 1$, so ist $\frac{1}{|q|} > 1$. Es gibt also ein $x > 0$, so dass $\frac{1}{|q|} = 1 + x$ ist, und

   $$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Ist nun ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so kann man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass für $n \geq n_0$ gilt: $nx + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dazu brauchen wir nur

$$n \geq n_0 > \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

zu wählen. Dann ist $|q^n| = |q|^n \leq \dfrac{1}{1 + nx} < \varepsilon$.

Ohne besondere Begründung sei noch erwähnt, daß auch $a \cdot q^n$ gegen Null konvergiert, wenn $a > 0$ eine beliebige Konstante ist.

Jetzt verallgemeinern wir den Konvergenzbegriff auf Folgen mit beliebigem Grenzwert.

Definition.
Sei $a \in \mathbb{R}$. Eine Folge (a_n) *konvergiert* gegen a, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall\, n \geq n_0 \text{ gilt: } |a - a_n| < \varepsilon.$$

Man schreibt dann: $a_n \to a$, oder besser:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.}$$

Eine Folge, die nicht konvergiert, nennt man auch *divergent*.

Eine Folge a_n konvergiert also genau dann gegen a, wenn $a_n - a$ eine Nullfolge ist.

Wir wollen auch diesen Konvergenbegriff an einigen Beispielen testen:

Beispiele.

1. Wenn wir die Konvergenz einer Folge beweisen wollen, dann brauchen wir zuerst den Grenzwert. Wie verhält es sich damit bei der Folge $a_n := \dfrac{n}{n+1}$?

   Die ersten Werte sind

   $$a_1 = \frac{1}{2},\; a_2 = \frac{2}{3},\; a_3 = \frac{3}{4},\; a_4 = \frac{4}{5}.$$

   Sie nähern sich von unten immer mehr der 1, und da stets $a_n < 1$ ist, vermuten wir, dass (a_n) gegen 1 konvergiert. Wenn wir das beweisen wollen, müssen wir die Größe von $|1 - a_n|$ abschätzen. Es ist aber

   $$|1 - a_n| = |1 - \frac{n}{n+1}| = \frac{1}{n+1}.$$

   Um zu erreichen, dass $1/(n + 1) < \varepsilon$ wird, muss $n + 1 > 1/\varepsilon$ werden, also $n > 1/\varepsilon - 1$.

Sei nun ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Archimedes gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ ist. Für $n \geq n_0$ gilt dann:

$$|1 - a_n| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon.$$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

2. Wie sieht eine Folge aus, die nicht konvergiert? Die Werte der Folge 1, 2, 3, ... (gegeben durch $a_n := n$) wachsen über alle Grenzen, können sich also wohl kaum einem Grenzwert nähern. Das muss auch mit der Definition der Konvergenz zu sehen sein. Dazu überlegen wir uns: Die Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\exists\, a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n \geq n_0 \text{ gilt: } |a - a_n| < \varepsilon.$$

Die logische Verneinung dieser Bedingung lautet:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } \forall m \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq m \text{ mit } |a - a_n| \geq \varepsilon.$$

Zum Beweis sei also ein $a \in \mathbb{R}$ irgendwie vorgegeben. Wir müssen ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass sich immer wieder Folgeglieder um mehr als ε von a entfernen. Da in unserem Falle die Zahlen a_n über alle Grenzen wachsen, brauchen wir wohl nicht zu kleinlich zu sein. Wir wählen „auf Verdacht“ einfach $\varepsilon := 1$. Ist nun weiter irgend ein $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben, so müssen wir herausfinden, ob es ein $n \geq m$ gibt, so dass $|a - a_n| \geq 1$ ist. Da a festgelegt ist, wird die Zahl $a - a_n = a - n$ für genügend großes n negativ werden. In dem Fall ist $|a - a_n| = n - a$, und diese Zahl ist ≥ 1, falls $n \geq a + 1$ ist. Doch nach Archimedes ist es kein Problem, ein $n \in \mathbb{N}$ zu finden, so dass zugleich $n \geq m$ und $n \geq a+1$ ist. Damit ist alles geklärt, unsere Folge konvergiert tatsächlich gegen keine reelle Zahl.

Um die Konvergenz von Folgen auch in komplizierteren Fällen erfolgreich untersuchen zu können, brauchen wir stärkere Hilfsmmittel:

Satz. *(a_n), (b_n) seien zwei Zahlenfolgen, a, b, c reelle Zahlen.*

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ist, so gilt:

1. *Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.*
2. *Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.*
3. *Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.*
4. *Ist $b_n \neq 0$ für alle n, und $b \neq 0$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.*

Beweis: Exemplarisch behandeln wir nur den ersten Fall. Dazu verwenden wir die sogenannte $\varepsilon/2$–Methode:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist auch $\varepsilon/2 > 0$, und wegen der Konvergenz der Folgen (a_n) und (b_n) gibt es Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\begin{array}{rrcll} & |a - a_n| & < & \dfrac{\varepsilon}{2} & \text{für } n \geq n_1 \\ \text{und} & |b - b_n| & < & \dfrac{\varepsilon}{2} & \text{für } n \geq n_2. \end{array}$$

Ist nun n_0 die größere der beiden Zahlen n_1 und n_2, so folgt für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |(a+b) - (a_n + b_n)| &= |(a - a_n) + (b - b_n)| \\ &\leq |a - a_n| + |b - b_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad = \quad \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Bei der Anwendung der Sätze beachte man streng die logische Reihenfolge: Die Existenz der Grenzwerte von (a_n) und (b_n) muss zuvor gesichert sein! Dann folgt auch die Existenz der Grenzwerte der zusammengesetzten Folgen, und die Formeln können angewandt werden.

Mit den so bewiesenen Regeln kann man schon einiges anfangen:

Beispiele.

1. Typische Anwendungsbeispiele sind Folgen wie

$$a_n := \frac{18n^3 + 2n^2 - 329}{3n^3 - 25n^2 + 12n - 37}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz von n, hier also durch n^3, so erhält man:

$$a_n = \frac{18 + 2 \cdot \frac{1}{n} - 329 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3}{3 - 25 \cdot \frac{1}{n} + 12 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 - 37 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3}.$$

Da $1/n$ gegen Null konvergiert, folgt mit den Grenzwertsätzen, dass (a_n) gegen $18/3 = 6$ konvergiert.

Dieses Verfahren geht gut, solange die höchste Potenz von n im Nenner steht. Steht sie nur im Zähler, so konvergiert die Folge nicht. Betrachten wir zum Beispiel

$$a_n := \frac{n^2 + 1}{3 - n} = \frac{n}{\frac{3}{n} - 1} - \frac{1}{n - 3}.$$

Der zweite Summand strebt gegen Null, aber der erste wächst über alle Grenzen.

2. In manchen Fällen ist besondere Vorsicht geboten.

$$\text{Sei} \quad a_n := \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}.$$

Dividiert man oben und unten durch n^2, so erhält man:

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Da jeder Summand gegen 0 strebt, schließt man freudestrahlend, dass auch der ganze Ausdruck gegen 0 konvergiert. Das ist aber Unsinn! Im Grenzfall hätte man unendlich viele Summanden.

Wie können wir Klarheit bekommen? Erinnern wir uns an die Gauß–Formel: Wenn wir im Zähler $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ einsetzen, so erhalten wir: $a_n = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} \cdot (1 + \dfrac{1}{n})$, und das konvergiert gegen $\dfrac{1}{2}$.

Wir kommen nun zu einer ganz anderen Sorte von Folgen.

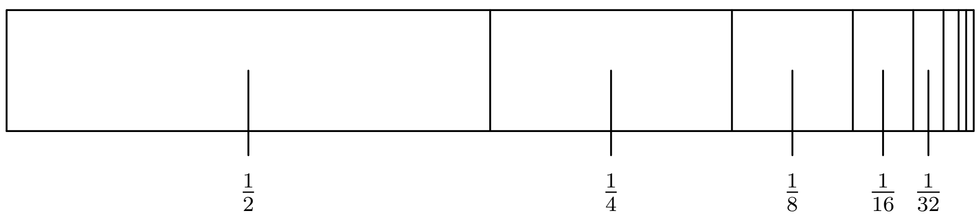
Unendlich viele Summanden kann man nicht wirklich addieren, aber man kann eine Strecke von endlicher Länge aus unendlich vielen Teilstrecken zusammensetzen.

Für die griechischen Philosophen war das ein unlösbarer Widerspruch. Zenon von Elea (ca. 495-430 v.Chr.) versuchte mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte zu beweisen, dass es in Wirklichkeit keine Bewegung gäbe:

Eines Tages wollte der sportliche Achilles mit der langsamen Schildkröte um die Wette laufen. Da er zehn mal so schnell wie die Schildkröte laufen konnte, ließ er ihr einen Vorsprung von 1000 Schritten. Diesen Vorsprung hatte er zwar schnell eingeholt, aber indessen war die Schildkröte 100 Schritte weitergekrochen. Nachdem Achilles diese 100 Schritte zurückgelegt hatte, war seine Gegnerin 10 Schritte vor ihm. Und so ging es weiter. Jedesmal, wenn der Held den letzten Vorsprung eingeholt hatte, war ihm die Schildkröte wieder um ein Zehntel dieses Betrages „davongeeilt“.

Die Logik, so meinte Zenon, zeige, dass Achilles seine Gegnerin nie hätte einholen können. Da der Augenschein das Gegenteil beweise, müsse dieser Augenschein trügen, jede Bewegung sei nur Illusion.

Die „Addition“ der unendlich vielen Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ kann man sich graphisch veranschaulichen:



Es leuchtet ein, dass man auf diese Weise schließlich das ganze „Intervall“ von 0 bis 1 ausschöpft. In gewissem Sinne ist also

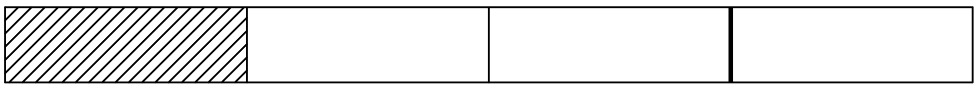
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots = 1\,.$$

Etwas komplizierter ist die folgende Aussage:

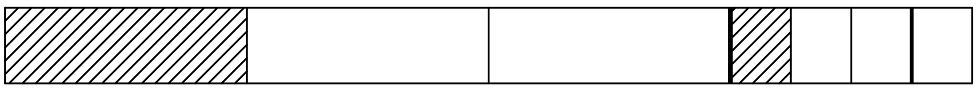
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots = \frac{1}{3}\,.$$

Wie kann man das sehen? Diesmal versuchen wir, ein Drittel des Intervalls von 0 bis 1 auszuschöpfen.

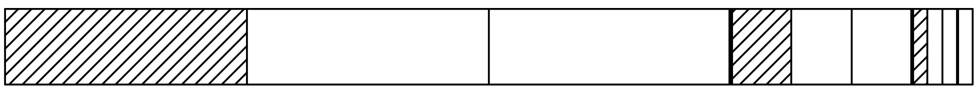
1. Schritt: $\frac{1}{4}$ ist der dritte Teil des Intervalls von 0 bis $\frac{3}{4}$. Damit hat man aus diesem Intervall schon genug herausgenommen.



2. Schritt: $\frac{1}{16}$ ist der dritte Teil von drei Vierteln des restlichen Intervalls von $\frac{3}{4}$ bis 1. Damit hat man insgesamt aus dem Intervall von 0 bis $\frac{15}{16}$.



3. Schritt: $\frac{1}{64}$ ist der dritte Teil von drei Vierteln des restlichen Intervalls von $\frac{15}{16}$ bis 1.



Durch dieses Verfahren wird schließlich das ganze Intervall von 0 bis 1 ausgeschöpft, und die markierten Abschnitte ergeben genau ein Drittel davon.

Was bedeutet es im allgemeinen, unendlich viele reelle Zahlen $a_i \geq 0$ zu addieren? Wenn wir keine Obergrenze haben, die wir ausschöpfen können, ist nicht klar, ob etwas Sinnvolles dabei herauskommt. Die gute Nachricht ist, dass wir auf jeden Fall schon mal symbolisch eine unendliche Summe hinschreiben dürfen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

So etwas nennt man eine *unendliche Reihe.*

Das oben beschriebene „Exhaustions-Prinzip“ legt nahe, dass eine unendliche Reihe zumindest in gewissen Fällen ein endliches Resultat liefert, z.B.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{3}\,.$$

Wir beschränken uns deshalb erst mal auf den Fall, dass es eine feste Zahl $C > 0$ gibt, so dass alle endlichen „Partialsummen“ $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ durch C beschränkt sind. Außerdem können wir benutzen, dass die Partialsummen bei jedem Schritt größer werden, weil bei jedem Schritt ein positiver Term addiert wird.

Definition.
Eine Folge (a_n) von reellen Zahlen heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*), falls gilt:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall\, n \geq n_0 \text{ gilt: } a_n \leq a_{n+1} \quad (\text{bzw. } a_n \geq a_{n+1}).$$

Die Folge (a_n) heißt *nach oben (bzw. nach unten) beschränkt*, falls die Menge der Folgeglieder eine obere (bzw. untere) Schranke besitzt.

Satz von der monotonen Konvergenz. *Jede monoton wachsende und durch eine reelle Zahl $C > 0$ nach oben beschränkte Folge (a_n) von reellen Zahlen konvergiert gegen einen „Grenzwert“ $a \leq C$.*

BEWEIS: Sei $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da M nicht leer und nach Voraussetzung nach oben beschränkt ist, existiert $a := \sup(M)$. Wir können beweisen, dass a tatsächlich der Grenzwert ist.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke mehr. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Wegen der Monotonie gilt dann für $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_n, \quad \text{also } 0 \leq a - a_n < \varepsilon.$$

Das bedeutet insbesondere, dass $|a - a_n| < \varepsilon$ ist. ∎

Dieses Konvergenzkriterium hängt so eng mit dem Vollständigkeitsaxiom zusammen, dass es auch an dessen Stelle treten könnte.

Analog gilt übrigens auch:

Eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge konvergiert.

Um dieses Ergebnis auf unendliche Reihen anwenden zu können, müssen wir erst mal erklären, was wir genau darunter verstehen wollen, dass eine Reihe konvergiert.

Definition.

Eine unendliche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt *konvergent*, falls die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ gegen eine reelle Zahl S konvergiert.

Der Grenzwert wird auch mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ bezeichnet.

Die Partialsummen einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern bilden automatisch eine monoton wachsende Folge. Daher gilt:

Satz. *Sind die Partialsummen S_n einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern simultan durch eine reelle Zahl $C > 0$ nach oben beschränkt, so konvergiert die Reihe gegen eine reelle Zahl $S \leq C$.*

Es ist offensichtlich, daß auch folgende Umkehrung gilt: Wenn die Reihe konvergiert, dann sind die Partialsummen beschränkt.

Wir können uns eine unendliche Reihe immer folgendermaßen zerlegt denken:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{\text{Anfangsstück } S_n} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i}_{\text{Endstück } S-S_n}$$

Daß die Reihe konvergiert, bedeutet: Die Folge (S_n) der Anfangsstücke strebt gegen S, und die Endstücke $(S - S_n)$ streben gegen Null.

Betrachten wir nun die Partialsummen

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}\,.$$

Setzen wir $S = \dfrac{1}{1-q}$, so konvergiert $S - S_n = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$ gegen Null, sofern nur $|q| < 1$ ist. Das bedeutet:

$$\text{Für } 0 \leq q < 1 \text{ ist } \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \quad (\text{„geometrische Reihe“}).$$

Speziell ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2, \text{ also } \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1\,.$$

Und etwas allgemeiner ist (für natürliche Zahlen n und m mit $0 < m < n$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{m}{n}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{m}{n}} - 1 = \frac{n}{n-m} - \frac{n-m}{n-m} = \frac{m}{n-m}\,.$$

Die Strecke, die der sagenhafte Achilles zurücklegen musste, um die Schildkröte einzuholen, beträgt also

$$1000 + 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = 1000 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = 1000 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{10\,000}{9} = 1\,111 + \frac{1}{9} \quad \text{Schritte.}$$

Wenden wir uns der Darstellung reeller Zahlen in Form von periodischen Dezimalbrüchen zu: Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}
0.33333\ldots \quad &:= \quad \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots \\
&= \quad 3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i \\
&= \quad 3 \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i - 1 \right) \\
&= \quad 3 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) \\
&= \quad 3 \cdot \left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9} \right) \quad = \quad 3 \cdot \frac{1}{9} \quad = \quad \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Allgemein kann man zeigen, dass jeder periodische Dezimalbruch eine rationale Zahl darstellt und dass umgekehrt jede rationale Zahl als periodischer Dezimalbruch geschrieben werden kann.

Verblüffend ist folgender Fall:

$$\begin{aligned}
0.99999\ldots \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} \right) \\
&\ldots \\
&= \quad 9 \cdot \left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9} \right) \quad = \quad 9 \cdot \frac{1}{9} \quad = \quad 1.
\end{aligned}$$

Betrachten wir schließlich noch den periodischen Dezimalbruch

$$\begin{aligned}
x \quad &= \quad 0.142857\underline{142857}\ldots \quad = \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{142857}{10^{6\nu}} \\
&= \quad 142857 \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^6}\right)^{\nu} - 1 \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 142857 \cdot \left[\frac{1}{1-10^{-6}} - 1 \right] \\
&= 142857 \cdot \frac{1}{10^6 - 1} \quad = \quad \frac{142857}{999999} \\
&= \frac{15873}{111111} \quad = \quad \frac{1443}{10101} \quad \text{(Division durch 9 und durch 11)} \\
&= \frac{481}{3367} \quad = \quad \frac{37}{259} \quad \text{(Division durch 3 und durch 13)} \\
&= \frac{1}{7}.
\end{aligned}
$$

Nicht alle Reihen lassen sich so leicht behandeln wie die geometrische Reihe. Insbesondere ist die Bestimmung des Grenzwertes in vielen Fällen schwer oder unmöglich. Manchmal kann man aber zumindest die Konvergenz nachweisen, indem man Vergleiche mit einer geometrischen Reihe herstellt.

Satz (Quotientenkriterium). *Sei* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *eine Reihe mit positiven Gliedern. Gibt es ein* q *mit* $0 < q < 1$, *so daß* $\dfrac{a_{i+1}}{a_i} < q$ *für alle* i *ist, so ist die Reihe konvergent.*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt:

$$a_2 < q \cdot a_1, \quad a_3 < q \cdot a_2 < q^2 \cdot a_1 \quad \text{und allgemein } a_i < q^{i-1} \cdot a_1.$$

Da $\sum_{i=0}^{\infty} q^i \cdot a_1$ konvergiert, sind die Partialsummen von $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot q^i$ und damit auch die Partialsummen von $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ beschränkt, und auch diese Reihe ist konvergent. ■

Es reicht schon, wenn die Quotientenbedingung ab einer Nummer n_0 gilt.

Beispiel.

Die Fakultäten $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ wachsen sehr schnell. Deshalb strebt $1/n!$ sehr schnell gegen Null, und es besteht die Hoffnung, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i!$ konvergiert. Tatsächlich ist

$$\frac{1/(i+1)!}{1/i!} = \frac{i!}{(i+1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot i \cdot (i+1)} = \frac{1}{i+1} \leq \frac{1}{2},$$

und aus dem Quotientenkriterium folgt die Konvergenz.

Über den Grenzwert können wir momentan nicht viel sagen, denn er ist eine schwer greifbare irrationale Zahl. Tatsächlich dreht man den Spieß um und definiert diese Zahl als Grenzwert der Reihe.

$$e = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \text{ heißt } \textit{Eulersche Zahl.}$$

Man kann nachrechnen, daß $e = 2,718281\ldots$ ist. Es handelt sich um einen nicht-periodischen Dezimalbruch, wie sich aus der folgenden Aussage ergibt.

Behauptung: Die Zahl e ist irrational.

Beweis: Wir nehmen an, es sei $e = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ein gekürzter Bruch, mit $p, q \in \mathbb{N}$. Aus dem Beweis der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ mit $a_i = 1/i!$ ergibt sich die Abschätzung

$$a_i < (\frac{1}{2})^{i-1} \cdot a_1, \text{ also } S_n \leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^i \leq 1 + 2 = 3.$$

Zusammen mit der Gleichung $a_0 + a_1 + a_2 = 2.5$ folgt daraus die Ungleichung $2.5 < e < 3$. Also muss $q > 2$ sein. Außerdem ist $e \cdot q!$ eine ganze Zahl. Andererseits gilt aber:

$$\begin{aligned} e \cdot q! &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} \cdot q! \\ &= \text{eine ganze Zahl } + \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots \right), \end{aligned}$$

wobei der Ausdruck in der Klammer $< \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \dfrac{1}{2}$ ist.

Das ist aber ein Widerspruch. ∎

Dass unendlich viele Summanden etwas Endliches ergeben, ist schon etwas besonderes. Das zeigt sich z.B. bei der sogenannten „harmonischen Reihe".

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots .$$

Wir untersuchen ganz spezielle Partialsummen S_n, nämlich die mit der Nummer $n = 2^k$.

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4+1} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &> \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = k \cdot \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck wächst über alle Grenzen. Die harmonische Reihe konvergiert also nicht, sie divergiert! Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass sie dies schrecklich langsam tut.

Bisher haben wir uns nur mit Reihen mit positiven Gliedern beschäftigt. Man kann natürlich auch Reihen mit beliebigen Gliedern betrachten, z.B. die „alternierende harmonische Reihe“

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Man kann zeigen, dass diese Reihe konvergiert. Entscheidend ist dabei aber, dass man bei der Summation die natürliche Reihenfolge einhält. Wenn man davon abweicht, kann es zu Katastrophen kommen.

Wir bezeichnen mit P_i die positiven Terme $1/(2i-1)$, also 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\dots$, und mit $-N_i$ die negativen Terme $-1/(2i)$, also $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{6}$, $\dots$. Dann wählen eine beliebige Zahl z, meinetwegen $z = 37$. Die Summen $P_1 + P_2 + \dots + P_n$ wachsen (wie bei der harmonischen Reihe) über alle Grenzen. Also gibt es ein erstes $n = n_1$, so daß $P_1 + \dots + P_{n_1} > z$ ist.

Die Summen $N_1 + N_2 + \dots + N_m$ wachsen ebenfalls über alle Grenzen. Es gibt deshalb ein erstes $m = m_1$, so daß wieder gilt:

$$(P_1 + P_2 + \dots + P_{n_1}) - (N_1 + N_2 + \dots + P_{m_1}) < z\,.$$

Jetzt addieren wir wieder positive Terme $P_{n_1+1}, P_{n_1+2}, \dots$, bis die Summe erneut z übersteigt, und dann subtrahieren wir $N_{m_1+1}, N_{m_1+2}, \dots$, bis die Summe kleiner als z wird. So fährt man fort mit Addieren und Subtrahieren. Da die Glieder der Reihe gegen Null konvergieren, nähert man sich bei diesem Verfahren der Zahl z beliebig gut an. Das zeigt, daß die Reihe nach diesen Umordnungen gegen z konvergiert.

Dieses Phänomen tritt nicht bei allen alternierenden Reihen auf, wohl aber bei solchen, die aus divergenten Reihen mit positiven Gliedern durch Einfügen von Minuszeichen entstanden sind. In der Frühzeit der Geschichte der Reihen führte das zu vielen Trugschlüssen.

Für spätere Anwendungen notieren wir noch die folgenden Vergleichssätze:

Satz. *Es seien (a_n), (b_n) konvergente reelle Folgen, und es gelte:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
2. $a_n \le b_n$ *für fast alle n (d.h., es gibt ein n_0, so dass $a_n \le b_n$ für $n \ge n_0$ gilt).*

Dann ist auch $a \le b$.

Satz. *Die Folgen (x_n) und (y_n) mögen beide gegen die Zahl a konvergieren, und es sei $x_n \le a_n \le y_n$ für fast alle n. Dann konvergiert auch (a_n) gegen a.*

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz können wir auch endlich eine Folge konstruieren, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert:

Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_0 := 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Dann zeigt man:

1. Alle x_n sind positiv.
2. Für $n \geq 0$ ist $x_n^2 - 2 \geq 0$.
3. Für $n \geq 1$ ist $x_n - x_{n+1} \geq 0$.

Aus (1) folgt, dass die Folge nach unten beschränkt ist, nach (3) ist sie monoton fallend. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt, dass (x_n) gegen eine reelle Zahl $x \geq 0$ konvergiert. Weil $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ist, folgt aus der Definitionsgleichung, dass $x = \frac{1}{2}(x + 2/x)$ ist, also $x^2 = 2$.

Nachweis der drei Eigenschaften:

1) ergibt sich durch einen einfachen Induktionsbeweis.

2) Es ist

$$\begin{aligned}
x_n^2 - 2 &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)^2 - 2 \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 4 + \frac{4}{x_{n-1}^2}\right) - 2 \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 4 + \frac{4}{x_{n-1}^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

3) Es ist

$$\begin{aligned}
x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \\
&= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - 2) \geq 0 \text{ (wegen (1))}.
\end{aligned}$$

Die Folge konvergiert übrigens außerordentlich schnell! Das Verfahren war schon den Babyloniern bekannt.