1 Logik und Mengenlehre

Definition. (Cantor, 1895)
Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.

heute:

Axiomatische Mengenlehre, mathematische Grundlagenforschung

Naive Mengenlehre als Sprach- und Arbeitsmittel in der modernen Mathematik

Es werden die Grundbegriffe „Menge“ und „Element“ eingeführt. Die Mengen bezeichnen wir meist mit Großbuchstaben, die Elemente mit Kleinbuchstaben. Ist a ein Element von M, so schreiben wir:

$$\boxed{a \in M\,.}$$

Beispiele.

1. $\{1, 2, 3\}$ ist die Menge der Zahlen 1, 2 und 3.
2. $\{$ blau, grün, gelb, orange, rot, violett $\}$ ist die Menge der Primär- und Sekundärfarben.
3. $\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ ist die Menge der „Farben“ beim Skatspiel.

Bei dieser Schreibweise kommt es nicht auf die Reihenfolge an! So sind etwa die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{3, 1, 2\}$ gleich. Wichtig ist aber, dass die Elemente „wohlunterschieden“ sind. Die Menge $\{1, 2, 2\}$ stimmt mit der Menge $\{1, 2\}$ überein.

Definition.
Zwei Mengen M und N heißen *gleich* (in Zeichen: $M = N$), wenn sie die gleichen Elemente besitzen.

Z.B. ist $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\} = \{1, 2, 3\}$ und $\{\text{Primzahlen } < 10\} = \{2, 3, 5, 7\}$.

Manchmal ist es einem zu mühsam, alle Elemente hinzuschreiben. Dann deutet man die fehlenden durch Pünktchen an.

Beispiele.

1. $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 10.

2. $\{a, b, c, \ldots, z\}$ ist die Menge der Kleinbuchstaben von a bis z.

Handelt es sich um unendlich viele Elemente, so lässt man das Ende offen.

Beispiele.

1. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen (Hier benutzen wir erstmals das Symbol „:=“ zum Definieren eines neuen Objekts!), und
   $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0.

2. $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.

3. $\mathcal{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$ ist die Menge der Primzahlen.

Diese Schreibweise bietet natürlich Anlass zu vielerlei Missverständnissen. Zum Beispiel kann $\{3, 5, 7, \ldots\}$ die Menge der ungeraden positiven ganzen Zahlen sein, aber auch die Menge der ungeraden Primzahlen. Und was verbirgt sich hinter der Menge $\{3, 31, 314, 3141, 31415, \ldots\}$?

Besser ist daher die **Beschreibung einer Menge durch eine Aussageform**.

Definition.
Eine *Aussage* ist ein als Satz formulierter Gedanke, dem man auf sinnvolle Weise einen Wahrheitswert zuordnen kann.

Als Werte sind nur *„wahr“* oder *„falsch“* zugelassen.

Formal ist eine Aussage ein grammatikalisch richtiger Satz.

Z.B.: „625 ist eine Quadratzahl.“

Inhaltlich muss es möglich sein, dem Satz einen Wahrheitswert zuzuordnen. Bei dem obigen Beispiel ist das kein Problem, der Satz ist offensichtlich wahr. Auch ein Satz wie „Krokodile leben vorwiegend in der Arktis“ bereitet keine Schwierigkeiten. Er ist offensichtlich falsch. Problematisch wird es bei Aussagen wie

„Am 6. September 2025 wird es in Wuppertal regnen.“

Diese Aussage können wir im Augenblick nicht überprüfen, aber dennoch ist sie wahr oder falsch, und damit zulässig.

„Wie spät ist es?“

Das ist zwar ein grammatikalisch richtiger Satz, aber als Fragesatz kann er weder wahr noch falsch sein. Also handelt es sich nicht um eine Aussage.

Definition.
Unter einer *Aussageform* versteht man ein sprachliches Gebilde, das formal wie eine Aussage aussieht, das aber eine oder mehrere Variable enthält.

Eine *Variable* ist ein Name für eine Leerstelle in einem logischen oder mathematischen Ausdruck oder in einer Aussage. An Stelle der Variablen kann ein konkretes Objekt eingesetzt werden. Wir kommen überein, dass wir nur solche Objekte einsetzen, für die auch etwas Sinnvolles herauskommt. Wir sagen, dass wir die Objekte in einem *zulässigen Objektbereich* wählen.

Eine Aussageform $A(x)$, in der x als einzige Variable vorkommt, beschreibt eine Eigenschaft, die dem für x einzusetzenden Objekt zukommt. Auf diese Weise bekommt x ein sogenanntes *Prädikat*, und man nennt die Theorie der Aussageformen deshalb auch *Prädikatenlogik*. Es handelt sich dabei um eine Erweiterung der Aussagenlogik: Ersetzt man in $A(x)$ die Variable x durch ein zulässiges Objekt, so erhält man eine sinnvolle Aussage, der man dann einen Wahrheitswert zuordnen kann. Enthält eine Aussageform mehrere Variable, so muss man diesen Schritt mehrfach durchführen.

Ist $E(x)$ eine Aussageform mit einer freien Variablen x, so bezeichnet man die Menge M aller Objekte a, für die die Aussage $E(a)$ wahr ist, mit

$$M = \{x \mid E(x)\} \text{ (oder } = \{x : E(x)\}).$$

Man sagt, „*M ist die Menge aller x mit $E(x)$*“.

Beispiele.

1. $\mathcal{P} := \{x \mid x \text{ ist Primzahl. }\}$.
2. Die Menge $\{x \mid (x \in \mathcal{P}) \land (x \text{ ist ein Teiler von } 30)\}$ besteht genau aus den Elementen 2, 3 und 5.
3. Die Menge $\{x \mid x = 2k + 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0\}$ ist die Menge der ungeraden positiven ganzen Zahlen.

Aus einfachen Aussagen (oder Aussageformen) kann man durch *logische Verknüpfungen* kompliziertere bilden. Dabei gibt man mit Hilfe sogenannter *Wahrheitstafeln* an, wie der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage durch die Werte der Teilaussagen bestimmt ist.

Definition.
Unter der *Konjunktion* zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \land B$ (in Worten: „A **und** B“), die genau dann wahr ist, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

Bezeichnen wir die beiden möglichen Wahrheitswerte mit w und f (für „wahr“ und „falsch“), so gibt die folgende Wahrheitstafel an, wie die Konjunktion $A \land B$ mit einem Wahrheitswert versehen wird. Offensichtlich gibt es genau 4 Möglichkeiten, wie die Werte von A und B verteilt sein können, und für jede dieser Möglichkeiten wird der Wert von $A \land B$ festgelegt.

Das sieht folgendermaßen aus:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Sind A und B zwei Mengen, so existiert der *Durchschnitt* (oder die *Schnittmenge*) von A und B, d.h. die Menge

$$\boxed{A \cap B := \{x \,:|\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}.}$$

Definition.

Unter der *Disjunktion* zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \vee B$ (in Worten: „A **oder** B“), die genau dann wahr ist, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

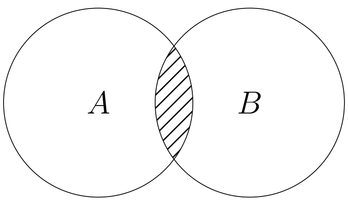
A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

In der Umgangssprache wird „oder“ meist im ausschließenden Sinne von „entweder ... oder“ gebraucht. Die logische Disjunktion ist aber auch dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. Deshalb sind umgangssprachliche Beispiele etwas schwer zu finden.

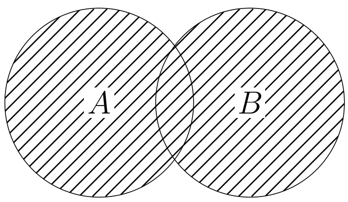
Sind A und B zwei Mengen, so existiert die *Vereinigung* (oder *Vereinigungsmenge*) von A und B. Darunter verstehen wir die Menge

$$\boxed{A \cup B := \{x \mid (x \in A) \;\vee\; (x \in B)\}.}$$

Diese Konstruktionen können auch auf mehrere Mengen angewandt werden.



$A \cap B$



$A \cup B$

Bei Aussageformen stellt sich die Frage der Allgemeingültigkeit.

Sei $A(x)$ eine Aussageform, z.B. „$3x^2 - 5x + 1 = 0$“. Zunächst muss x in einem zulässigen Objektbereich liegen, hier sicherlich ein Bereich von Zahlen. Am besten legen wir dafür eine *Grundmenge* G fest. Dann können wir folgende Menge bilden:

$$M = \{x \in G \,:\, A(x)\} = \{x \,:\, (x \in G) \wedge A(x)\}.$$

Ist $M = G$, so schreibt man:

$$\forall\, x \in G \,:\, A(x).\ (\text{„für alle } x \in G \text{ gilt:\dots“})$$

In vielen Fällen wird $A(x)$ nicht allgemein gelten. Im Extremfall kann sogar folgendes passieren: Die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{N} \,:\, 3x^2 - 5x + 1 = 0\}$$

hat überhaupt keine Elemente! Wir sprechen von einer (oder der ?) *leeren Menge*.

Behauptung: Es gibt nur **eine** leere Menge.

BEWEIS: Sind nämlich L_1 und L_2 zwei leere Mengen, so haben sie die gleichen Elemente (nämlich gar keine) und müssen also gleich sein. ∎

Man bezeichnet die eindeutig bestimmte leere Menge mit $\varnothing$. Es ist übrigens nicht immer so einfach festzustellen, ob eine Menge leer ist oder nicht. Dazu eine kleine Geschichte: Im 17. Jahrhundert schrieb der französische Mathematiker Pierre de Fermat an den Rand eines Buches:

> *Ist $n > 2$ eine natürliche Zahl, so hat die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine Lösung mit positiven ganzen Zahlen x, y und z. Dafür habe ich einen wunderbaren Beweis gefunden, doch ist dieser Rand zu schmal, um ihn zu fassen.*

Im Jahre 1905 war das Problem noch immer ungelöst, und es wurde ein Preis von 100 000 Goldmark für seine Lösung ausgesetzt. Um 1980 war klar, dass n größer als 125 000 sein müsste. Schließlich gelang 1993 Andrew Wiles der Beweis der Fermatschen Behauptung, mit Mitteln, die unvorstellbar weit über den Möglichkeiten des 17. Jahrhunderts lagen. 1997 wurde der Preis an Herrn Wiles übergeben, er hatte trotz zweier Währungsreformen immer noch einen Wert von 40 000 Euro.

Definition.

Unter der *Negation* einer Aussage A versteht man die Aussage $\neg A$ (in Worten: „**nicht** A“), die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

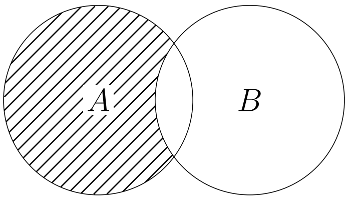
A	$\neg A$
w	f
f	w

Im Bereich der ganzen Zahlen ist die Verneinung der Aussage „4 ist ungerade“ die Aussage „4 ist gerade“. Aber Vorsicht! Im allgemeinen ist die Verneinung etwas anderes als das umgangssprachliche Gegenteil. Die Verneinung von „x ist schwarz“ ist keineswegs die Aussage „x ist weiß“. Denn „nicht schwarz“ könnte ja z.B. auch „rot“ oder „blau“ bedeuten.

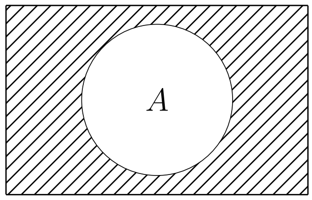
Unter der *Differenz* von A und B versteht man die Menge

$$\boxed{A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.}$$

Ist G eine zuvor festgelegte Grundmenge und A eine aus G ausgesonderte Menge, so bezeichnet man die Differenz $G \setminus A$ auch als *Komplement* von A in G (oder *Komplementärmenge*) und schreibt A' dafür.



$A \setminus B$



A'

Definition.
Zwei Aussagen A und B (bzw. Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$) heißen *äquivalent* oder *gleichwertig*, falls sie den gleichen Wahrheitswert besitzen (bzw. wenn $A(x)$ und $B(x)$ für jedes x äquivalent sind). Man schreibt dann: $A \iff B$ (in Worten: „A äquivalent B“ oder „A **gilt genau dann, wenn** B **gilt**“).

Die Wahrheitstafel sieht folgendermaßen aus:

A	B	$A \iff B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Zwei Aussagen können auch dann logisch äquivalent sein, wenn sie inhaltlich nichts miteinander zu tun haben.

Es gibt Aussagenverknüpfungen, die allein auf Grund ihrer logischen Struktur immer wahr sind, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte die verknüpften Einzel-Aussagen besitzen. Solche Aussagenverbindungen behalten ihre Allgemeingültigkeit auch dann, wenn man an Stelle der Aussagen Aussageformen einsetzt. Man spricht dann von *Tautologien.*

Beispiel.

Die Regel von der **doppelten Verneinung**:

$$\neg(\neg A) \iff A\,.$$

Umgangssprachlich bedeutet das: Eine doppelte Verneinung ist eine Bejahung. Allerdings gibt es Dialekte in Deutschland, in denen eine doppelte Verneinung als besonders bestärkte Verneinung gilt: „Nein, den Huber Franz hab' ich gar nie nicht im Bierzelt gesehen!" Solche Sprachregelungen können wir in unserer formalen Logik natürlich nicht verarbeiten.

Der Beweis für die Regel von der doppelten Verneinung kann mit Hilfe einer Wahrheitstafel geführt werden, indem man für die Aussage (oder Aussageform) A die beiden möglichen Wahrheitswerte einsetzt und dann überprüft, ob links und rechts vom Äquivalenzzeichen der gleiche Wert auftaucht:

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
w	f	w
f	w	f

Es liegt also tatsächlich eine Tautologie vor!

Weitere Beispiele für Tautologien sind die **de Morganschen Regeln**:

$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$$

und

$$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Beweis: Wir verwenden wieder eine Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w

Da sich in den beiden letzten Spalten stets gleiche Wahrheitswerte finden, ist die erste Tautologie bewiesen.

Der Beweis der zweiten Regel geht analog. ∎

Man kann dies alles in die Sprache der Mengenlehre übersetzen. Dazu brauchen wir allerdings erst mal den Begriff der Teilmenge.

M und N seien zwei Mengen. Wenn jedes Element von N auch ein Element von M ist, dann sagen wir, $N \subset M$ (in Worten: N ist eine *Teilmenge* von M). Zum Beispiel gilt $\varnothing \subset M$ und $M \subset M$ für jede Menge M.

Beispiel.

Nehmen wir den umgangssprachlichen (und etwas anfechtbaren) Satz:

Ältere Männer mit Hut sind schlechte Autofahrer.

Damit wird behauptet, dass die Menge H aller älteren Männer mit Hut in der Menge S der schlechten Autofahrer enthalten ist. Das ist wahrscheinlich eine falsche Aussage.

Man kann die Aussage auch nicht umdrehen, denn es wird erst recht nicht stimmen, dass alle schlechten Autofahrer ältere Männer mit Hut sind. Das wäre ja die Aussage $S \subset H$, und zusammen mit der Aussage $H \subset S$ hätte man $H = S$. Dieser Fehler wird aber im Alltag oft gemacht.

Wir nehmen der Einfachheit halber mal an, dass alle Studenten des Kurses an der Klausur teilnehmen und bezeichnen mit F die Menge der Kursteilnehmer, die mindestens 50 % der Aufgaben richtig bearbeiten. Weiter sei B die Menge derjenigen, die die Klausur bestehen. Nun kündigt der Dozent an: $F \subset B$ (wer wenigstens 50 % schafft, hat die Klausur bestanden). Ein Student schließt daraus: Man muss mindestens 50 % schaffen, um nicht durchzufallen. Mit anderen Worten: Wer nicht 50 % schafft, fällt durch. Sei G die Grundmenge aller Kursteilnehmer. Dann meint der Student: $F' \subset B'$. Das hätte zur Folge: Wenn $x \in B$ ist, so kann x nicht in F' liegen, denn dann wäre ja auch $x \in B'$, und das wäre ein Widerspruch. Also muss x in diesem Falle auch in F liegen. Der Student hat also fälschlicherweise geschlossen, dass $B \subset F$ ist. Es könnte aber sein, dass der Dozent nachträglich schon allen Studenten, die wenigstens 40 % schaffen (das ergibt eine Menge V mit $F \subset V$), den Schein gibt. Und da der Student gerade 48 % erlangt, gehört er zu B, aber nicht zu F.

Derartige Trugschlüsse sind besonders bei Juristen und Medizinern weit verbreitet. Gesetze und Verordnungen müssen sogar in vielen Fällen so interpretiert werden, dass sie im obigen Sinne der Logik widersprechen.

Satz. *Sei G eine fest vorgegebene Grundmenge, $A, B \subset G$. Dann gilt:*

1. $A'' = A$.
2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
3. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Beweis: Die erste Aussage folgt sofort aus der Regel von der doppelten Verneinung.

Betrachten wir die zweite Aussage. Sei x ein beliebiges Element der Grundmenge.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)' &\iff \neg(x \in A \cap B) \\ &\iff \neg(x \in A \quad \wedge \quad x \in B) \\ &\iff \neg(x \in A) \quad \vee \quad \neg(x \in B) \quad \text{(de Morgan !)} \\ &\iff x \in A' \quad \vee \quad x \in B' \\ &\iff x \in A' \cup B'. \end{aligned}$$

Die dritte Aussage folgt analog. ■

Wir haben schon den „Allquantor“ $\forall$ kennen gelernt. Sei nun wieder G eine Grundmenge und $E(x)$ eine Eigenschaft für $x \in G$. Wir haben uns damit beschäftigt, dass $M = \{x \in G : E(x)\}$ leer sein kann.

Ist $M \neq \varnothing$, so schreibt man:

$$\exists\, x \in G : E(x) \text{ („es gibt ein } x \text{ mit \ldots“)}$$

Der „Existenzquantor“ $\exists$ bedeutet: Es gibt wenigstens ein x mit der Eigenschaft $E(x)$, es kann aber auch mehrere geben.

Wir betrachten nun die Verneinung der „Quantoren“ $\forall$ und $\exists$. Sei $E(x)$ eine Aussage, die für gewisse Elemente einer Grundmenge G zutrifft, und für andere eventuell nicht. Dann gilt:

Satz.

1. $\neg(\forall\, x \in G : E(x)) \iff \exists\, x \in G : \neg E(x)$.

2. $\neg(\exists\, x \in G : E(x)) \iff \forall\, x \in G : \neg E(x)$.

Beweis: 1) Verneinung von All-Aussagen:

Sei $M := \{x \in G : E(x)\}$ und $M' := \{x \in G : \neg E(x)\}$. Dann ist offensichtlich $M \cup M' = G$ und $M \cap M' = \varnothing$.

Wir müssen die Aussage $M \neq G \iff M' \neq \varnothing$ beweisen. Das ist äquivalent zu der Behauptung

$$M = G \iff M' = \varnothing$$

und die ist trivial.

2) Verneinung von Existenz-Aussagen:

$$\begin{aligned} \neg(\exists\, x \in G : E(x)) &\iff \neg(\exists\, x \in G : \neg\neg E(x)) \\ &\iff \neg(\ \neg(\forall\, x \in G : \neg E(x))\ ) \\ &\iff \forall\, x \in G : \neg E(x). \end{aligned}$$

■

Beispiele.

1. Aussage: Alle Mathematiker sind Nichtraucher.
   Verneinung: Es gibt einen Mathematiker, der raucht. (Also nicht etwa: Alle Mathematiker rauchen.)

2. Aussage: Alle Wege führen nach Rom.
   Verneinung: Es gibt einen Weg, der nicht nach Rom führt.

3. Aussage: Es gibt eine rationale Zahl q mit $q^2 = 2$.
   Verneinung: Für alle rationalen Zahlen q ist $q^2 \neq 2$.

4. Aussage: Es gibt eine größte natürliche Zahl.
   Das sieht mit Quantoren folgendermaßen aus:

   $$\exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, k \in \mathbb{N} \,:\, k \leq n.$$

   Die Verneinung lautet:

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, k > n.$$

   Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine weitere natürliche Zahl k, die noch größer als n ist.

Natürlich kann immer nur entweder eine Aussage selbst oder ihre Verneinung wahr sein!

Wir treiben jetzt etwas „Mengen-Algebra“:

Satz. *Für beliebige Mengen A, B, C gelten folgende Regeln.*

1. *Kommutativgesetze:* $A \cup B = B \cup A$ *und* $A \cap B = B \cap A$.

2. *Assoziativgesetze:*
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *und* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

3. *Distributivgesetze:*

   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Beweis: Das Beweis-Schema ist bei allen Aussagen gleich. Deshalb beschränken wir uns hier auf den Beweis der ersten Formel. Wir führen zur Abkürzung zwei Aussageformen ein:

$$\begin{aligned} L(x) &\ :\Longleftrightarrow\ x \in A, \\ R(x) &\ :\Longleftrightarrow\ x \in B. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$x \in A \cup B \iff L(x) \vee R(x).$$

Aber der Wahrheitswert der Aussagen „$L(x) \vee R(x)$" und „$R(x) \vee L(x)$" stimmt immer überein, wie man leicht an Hand einer Wahrheitstafel sehen kann. Also gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \quad \vee \quad x \in B \\ &\iff x \in B \quad \vee \quad x \in A \\ &\iff x \in B \cup A. \end{aligned}$$

Nach Definition der Gleichheit von Mengen bedeutet das: $A \cup B = B \cup A$. ■

Eine **Warnung** sollte hier ausgesprochen werden! Es ist leicht, ein Äquivalenzzeichen hinzuschreiben. Aber die Aussagen $N \subset M$ und $M \subset N$ sind i.a. nicht gleichwertig, und nur, wenn sie beide gelten, ist $N = M$ und damit $x \in N \iff x \in M$. Der leichtfertige Umgang mit Äquivalenzen ist eine der großen Fehlerquellen in der Mathematik.

Wir kommen jetzt zu unserer schwierigsten logischen Verknüpfung. Wie kann man logisch ausdrücken, daß aus der Aussage A die Aussage B folgt? Wir wollen das mit Hilfe der elementaren Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ versuchen. Wegen

$$A \wedge B \iff \neg((\neg a) \vee (\neg B))$$

sollte man sogar mit $\vee$ und $\neg$ auskommen.

Dass B aus A folgt, bedeutet: Ist A wahr, so muss zwangsläufig auch B wahr sein. B kann also höchstens dann falsch sein, wenn $\neg A$ wahr ist. Das führt zu folgendem Begriff:

Definition.

Unter der *Implikation* $A \implies B$ (in Worten: „A **impliziert** B") versteht man die zusammengesetzte Aussage $B \vee (\neg A)$.

A	B	$A \implies B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Umgangssprachlich sagen wir meist:

„Aus A folgt B", oder auch: „Wenn A, dann B".

Statt von einer Implikation sprechen wir deshalb auch von einer *logischen Folgerung*. Die Aussage A nennt man die *Voraussetzung* oder *Prämisse*, die Aussage B *Behauptung* oder *Conclusio*. Es gibt aber einen großen Unterschied zwischen der Implikation und dem, was man so im normalen Leben unter einer Folgerung versteht. Der ungeübte Mathematiker stellt sich unter einer „Voraussetzung" immer eine wahre Aussage vor, denn der Sinn der Implikation sollte ja wohl darin bestehen, dass man von bekannten Wahrheiten auf neue schließt. Wir haben hier aber die Implikation als eine logische Verknüpfung definiert, die auch dann gebildet werden kann, wenn die Prämisse falsch ist. Dass sie in solchen Fällen stets wahr ist, kann man nur formal der Wahrheitstafel entnehmen.

Beispiele.

1. „Wenn man das Licht anschaltet, wird es hell.“ Diese inhaltlich wahre Folgerung lässt sich über eine Kette wahrer physikalischer Aussagen nachweisen.

2. „In der euklidischen Geometrie beträgt die Winkelsumme im Dreieck immer 180°. Das ist sicher wahr, aber was ist denn hier die Prämisse? Sie ist in dem Ausdruck „In der euklidischen Geometrie“ versteckt. Was das genau bedeutet, darauf gehen wir später noch ein.

3. Die ersten beiden Beispiele waren sehr komplex, es gibt aber auch einfachere Situationen: Wenn A und B zwei Aussagen sind, dann ist

   $$A \wedge B \implies A$$

   eine wahre Implikation, unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B. Den Nachweis führt man ganz einfach mit einer Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \implies A$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

4. „Wenn $2 \cdot 2 = 4$ ist, ist Texas ein amerikanischer Bundesstaat.“ Das ist eine formal korrekte logische Folgerung, obwohl die beiden beteiligten Aussagen inhaltlich nichts miteinander zu tun haben.

5. „Wenn $2 \cdot 2 = 5$ ist, bin ich der Papst.“ Auch diese Folgerung ist formal korrekt, obwohl sie reichlich absurd klingt. Wir sollten uns merken:

   Aus einer falschen Aussage kann man alles folgern!

6. „Wenn x eine gerade Zahl ist, dann ist auch x^2 gerade.“ Diese Aussage ist sicher wahr, denn sie stellt sogar eine inhaltlich wahre Folgerung dar. Oder. . . ?! Was ist denn x ??? Wir verstehen und bejahen zwar die Folgerung, aber die Voraussetzung „x ist eine gerade Zahl“ ist eine Aussageform, deren Wahrheitswert von x abhängt. Setzen wir für x die Zahl 4 ein, so bekommen wir eine wahre Prämisse; setzen wir für x die Zahl 7 ein, so wird sie falsch.

   Allerdings kann man ja aus einer falschen Prämisse alles folgern, und wenn die Prämisse wahr ist, dann ist die Folgerung sogar inhaltlich wahr.

Satz. *Es ist* $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$.

BEWEIS: Das erhalten wir mit Hilfe einer großen Wahrheitstafel. ∎

Wir können jetzt darüber sprechen, was *Mathematik* eigentlich ist.

Natürlich ist die Frage viel zu komplex für eine schnelle Antwort. Wir wollen hier nur über den formalen Aufbau einer mathematischen Theorie sprechen.

1) Mathematiker wollen alle Begriffe, über die sie sprechen, genau definieren. Das geht aber nicht immer, denn irgendwann muss man mit gewissen Grundbegriffen anfangen, die man nicht weiter erklären kann. Man spricht von *Grundbegriffen* oder *primitiven Termen*. In der Mengenlehre sind das die Begriffe „Menge" und „ist Element von", sowie die Gleichheit. Man kann sie nicht erklären, auch Cantors Versuch war keine echte Definition.

2) Über die Grundbegriffe kann man naturgemäß auch keine Aussage machen. Wir brauchen aber Aussagen, um eine Kette von logischen Folgerungen darauf aufzubauen. Also „erfinden" wir Aussagen, deren Wahrheit wir einfach vorschreiben. Solche Aussagen, die man sich wie die Spielregeln beim Monopoly vorstellen muss, nennt man *Axiome*.

In der Mengenlehre brauchen wir eine ganze Reihe von Axiomen. Wir können hier nicht im Detail darauf eingehen und beschränken uns auf zwei einfache Beispiele: Ein Axiom fordert z.B. die Existenz einer leeren Menge; ein anderes regelt die Gleichheit von Mengen, so wie wir das am Anfang schon getan haben.

3) Aus den Axiomen werden nun nach logischen Schlussregeln weitere Aussagen hergeleitet. Dabei hat man folgende Möglichkeiten:

- **Direkter Beweis:**
  Ist A wahr und die Implikation $A \implies B$ wahr, so ist auch B wahr.

- **Syllogismus-Regel:**
  Sind die Implikationen $A \implies B$ und $B \implies C$ wahr, so ist auch die Implikation $A \implies C$ wahr.

- **Kontrapositionsgesetz:**

  $$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A).$$

  Beispiel: Ist x^2 ungerade, so muss schon x ungerade sein. Das ist gleichwertig zu der Aussage „x gerade $\implies x^2$ gerade". Und diese Aussage kann viel einfacher gezeigt werden.

- **Indirekter Beweis:**
  Diese Methode wird manchmal mit dem Kontrapositionsgesetz verwechselt, sie ist aber wesentlich anspruchsvoller.

Es soll eine Implikation $A \implies B$ gezeigt werden. Ein direkter Beweis sei zu schwer (wie übrigens in vielen Fällen). Von der Aussage A sei schon klar, dass sie wahr ist. Nun machen wir die **Annahme**, dass B falsch ist. So erhalten wir die neue (erweiterte) Prämisse $A \wedge (\neg B)$. Wenn es jetzt gelingt, die Implikation $A \wedge (\neg B) \implies C$ zu beweisen, mit einer offensichtlich falschen Folgerung C, dem **Widerspruch**, so muss auch die erweiterte Prämisse falsch sein. Das ist nur möglich, wenn B wahr ist. Bei diesem Verfahren braucht die Aussage C mit dem ursprünglichen Problem inhaltlich nichts zu tun zu haben.

Beispiel: In einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 ist die Länge d der Diagonalen keine rationale Zahl.

Beweis: Wir nehmen an, d ist rational, also ein Bruch $d = p/q$. Brüche kann man kürzen, also können wir davon ausgehen, dass p und q keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Aus dem Satz des Pythagoras folgt die Gleichung $d^2 = 2$, also

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ und damit } p^2 = 2q^2.$$

Ist p^2 gerade, so muss auch p gerade sein, etwa $p = 2r$. Also ist $q^2 = 2r^2$. Wie eben folgt jetzt, dass q gerade ist. Weil p und q teilerfremd sind, ist dies der gewünschte Widerspruch.

Dass dies funktioniert, liegt an unserer 2-wertigen Logik!

- **Existenzbeweis:**
  Um eine Aussage der Form „$\forall x : E(x)$“ zu beweisen, muss man $E(x)$ allgemeingültig, also unabhängig von einem speziellen x zeigen.

  Um eine Existenzaussage „$\exists x : E(x)$“ zu beweisen, reicht es, ein Beispiel anzugeben und für dieses Beispiel die Aussage $E(x)$ zu zeigen. Das Auffinden des Beispiels gehört nicht zum Beweis.

  Beispiel: $x = 5$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 - 3x - 10 = 0$.

  Beweis: Wir setzen den Wert 5 in die Gleichung ein: $5^2 - 3 \cdot 5 - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$. Fertig!

  Was hier als Beweis gilt, kennt man von der Schule her als *Probe*. Natürlich muss man irgendwie zu der Lösung kommen, und bei komplizierteren Sachverhalten wird man in der Regel auch ein Lösungsverfahren angeben. Dann spricht man von einem *konstruktiven Existenzbeweis*. Im vorliegenden Fall wäre das die Methode der quadratischen Ergänzung.

  Ein Existenzbeweis gilt oftmals als anspruchsvoller als etwa ein Widerspruchsbeweis, denn er erfordert mehr Kreativität. Es gibt aber auch viele einfache

Situationen, wo ein Widerspruchsbeweis nicht vermieden werden kann. Das passiert vor allem im Bereich des unendlich Großen oder unendlich Kleinen.

Anhang: Axiome der Mengenlehre

1. **Existenz der leeren Menge:**
   Es gibt eine Menge L, so dass gilt: $\forall\, x \,:\, x \notin L$.

2. **Gleichheits-Axiom:**
   Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn gilt:
   $\forall\, x \,:\, x \in A \iff x \in B$.

   Man zeigt nun, dass es nur eine *leere Menge* gibt, und bezeichnet sie mit $\varnothing$. Ist $A \neq \varnothing$, so nennt man A *nicht-leer*.

3. **Paarmengen-Axiom:**
   $\forall\, x, y$ gibt es eine Menge M, die genau x und y als Elemente besitzt.

   Man schreibt dann $M = \{x, y\}$.

4. **Vereinigungs-Axiom:**
   Ist $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen, so gibt es eine Menge U, so dass gilt:

   $$x \in U \iff \exists\, M \in \mathcal{M} \text{ mit } x \in M.$$

   Man nennt $U = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ die *Vereinigungsmenge* der $M \in \mathcal{M}$.

5. A heißt *Teilmenge* von M (in Zeichen: $A \subset M$), falls gilt:
   $\forall\, x \,:\, x \in A \implies x \in M$.

   Potenzmengen-Axiom:
   Zu jeder Menge M gibt es eine Menge $P(M)$, so dass gilt:
   $\forall\, x \,:\, x \in P(M) \iff x \subset M$.

   Man nennt $P(M)$ die *Potenzmenge* von M.

6. **Aussonderungs-Schema:**
   Ist M eine Menge und $E(x)$ eine Eigenschaft von Elementen von M, so gibt es eine Menge N, so dass gilt: $\forall\, x \,:\, x \in N \iff (x \in M) \wedge E(x)$.

   Man schreibt in diesem Fall: $N = \{x \in M \,:\, E(x)\}$. Zum Beispiel existiert die Schnittmenge $A \cap B = \{x \in A \,:\, x \in B\}$. Ist die Schnittmenge leer, so nennt man A und B *disjunkt*.

7. **Ersetzungs-Schema (Bildmengen-Axiom):**
   Sei $F(x, y)$ eine Eigenschaft, so dass es zu jedem x genau ein y mit $E(x, y)$ gibt. Dann gibt es zu jeder Menge M eine Menge N, so dass gilt:

   $$\forall\, y \,:\, y \in N \iff \exists\, x \in M \text{ mit } E(x, y).$$

   Beschreibt $F(x, y)$ eine Funktion f, so ist

   $$N = f(M) = \{y \,:\, \exists\, x \in M \text{ mit } f(x) = y\}.$$

8. **Unendlichkeits-Axiom:**
   Es gibt eine Menge N, so dass gilt:

   (a) $M \neq \varnothing$.

   (b) Ist $x \in M$, so $\exists\, y \in M$ mit $x \in y$.

   Man nennt jede solche Menge eine *unendliche Menge*. Dieses etwas undurchsichtigte Axiom sichert die Existenz einer Menge $\mathbb{N}$ mit den Elementen $0 := \varnothing$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, $3 := \{0, 1, 2\}$ usw.

9. **Fundierungs-Axiom:**
   Jede nicht-leere Menge M besitzt ein Element x mit $x \cap M = \varnothing$.

   Dieses Axiom verhindert absurde Mengen wie $\{x : x \in x\}$.

10. **Auswahl-Axiom:**
    Ist $\mathcal{M}$ eine Menge von nicht-leeren paarweise disjunkten Mengen, so gibt es eine Menge A mit folgender Eigenschaft:

$$\forall\, M \in \mathcal{M}\ \exists \text{ genau ein } m \in M \cap A.$$