Das Unendliche in der Mathematik

Klaus Fritzsche (27. Mai 2008)

1) Potenzielle Unendlichkeit

Der liebe Gott und die großen Steine

Angst vor dem Unendlichen

Der Sandrechner

Unendlich kleine Größen

2) Mengen und Abbildungen

Cantors Mengenbegriff

Abbildungen

Endliche und unendliche Mengen

3) Cantor und das aktual Unendliche

Hilberts Hotel

Cantors Diagonalverfahren

Reelle Zahlen

Transfinite Zahlen

Stufen der Unendlichkeit

4) Die Kontinuumshypothese

Wohlordnung und Ordnungszahlen

Axiomatik und Wohlordnungssatz

Gödel und Cohen

1 Potenzielle Unendlichkeit

Der liebe Gott und die großen Steine

Als ich ein Kind war und noch gerne in den Religionsunterricht ging, wollte mich mein Vater, der eher ein Freigeist war, ein bisschen necken und fragte mich:

„Der liebe Gott kann doch alles!?“
„Ja!“
„Kann der liebe Gott auch große Steine machen?“
„Ja, der liebe Gott kann alles machen!“
„Kann der liebe Gott auch sehr große Steine hochheben?“
„Ja!“
„Und kann denn der liebe Gott einen so großen Stein machen, dass er ihn nicht mehr hochheben kann?“
„??!!“

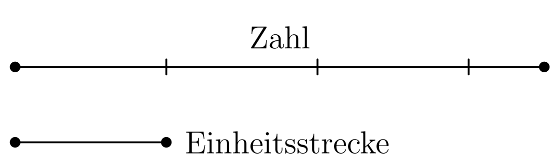
Angst vor dem Unendlichen

Mathematik im antiken Griechenland (im Gegensatz zu Ägypten/Mesopotamien):

- Beweise, Axiome, abstrakte Gedankengebäude.
- Zwei gegensätzliche Seiten: Die Zahl als Symbol für die Harmonie der Welt, und auf der anderen Seite die axiomatisch begründete Geometrie.
- Alexandria, 300 v.Chr.: Die „Elemente“ des Euklid, Punkte und Geraden in der Ebene, und ihre Beziehungen zueinander.
- Unendlich dünn: Etwas, das nicht weiter teilbar ist.

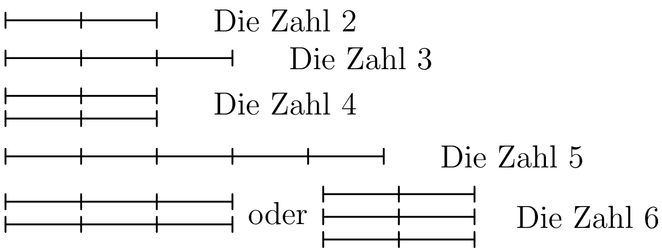
  Etwas unendlich Ausgedehntes gibt es nicht.

  Gerade = kürzeste Verbindung zweier Punkte, also eine Strecke. Ein „Postulat“ sichert, dass eine Gerade über einen Endpunkt hinaus verlängert werden kann.
- Zahl = Strecke und ihr Verhältnis zu einer gegebenen Einheitsstrecke.

- Keine Null, keine Eins!
  Positive, ganzen Zahlen: 2, 3, 4, ...

Nicht zusammengesetzte Zahl: Primzahl:



2, 3 und 5 sind die drei kleinsten Primzahlen. Jede ganze Zahl ist entweder Primzahl oder aus mehreren gleich großen kleineren Zahlen zusammengesetzt. Jede Zahl besitzt einen kleinsten Primteiler.

Satz von Euklid (Satz IX.20 der „Elemente“)
Es gibt unendlich viele Primzahlen.

BEWEIS: **Annahme:** Es gibt nur endlich viele Primzahlen, etwa $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

$$P := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Sei q der kleinste Primteiler von $P+1$, Dann kommt q unter den Zahlen $p_1, \ldots, p_n$ vor, ist also auch ein Teiler von P.

Wenn q ein Teiler von P und von $P+1$ ist, dann muss $q = 1$ sein. Widerspruch! ■

In Wirklichkeit hat Euklid das Ergebnis so formuliert:

Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

„Zweiwertige Logik“: Nur zwei mögliche „Wahrheitswerte“, ***wahr*** oder ***falsch***.

Moderne Denkweise: „nicht endlich“ = „unendlich“.

Antike Denkweise: „Unendlich“ kann in der Mathematik nicht vorkommen.

Der Sandrechner

Wenige Jahre nach Euklid: Archimedes in Syrakus. Berechnung des Flächeninhaltes eines Parabelstückes (Approximationsverfahren).

Unendlich Großes: Abhandlung „Der Sandrechner“, Stellenwertsystem mit der Basis 10^8. (größte vorher bekannte Zahl: ***Myriade*** $= 10^4 = 10.000$).

„Es gibt Leute, die der Meinung sind, die Zahl des Sandes (also der Sandkörner auf der Erde) sei unendlich groß. Andere glauben zwar nicht, dass die Zahl unendlich sei, aber doch, dass noch keine Zahl genannt worden sei, die seine Menge übertreffen könnte.“

Zahlen der „ersten Ordnung“: bis 10^8,
Zahlen der zweiten Ordnung: bis $10^{2 \cdot 8}$, …

Zahlen der 10^8-ten Ordnung: bis zur „ersten Periode" $P = 10^{10^8 \cdot 8}$.
Archimedes zählt weiter, bis zur Zahl P^{10^8}.

Für die Anzahl aller Sandkörner, die seiner Schätzung nach ins Weltall passen würden, berechnet Archimedes 10^{63}.

Moderne Schätzung: Die Anzahl der Atome im sichtbaren Universum angeblich $= 10^{80}$.

Edward Kasner und James Newman (um 1940): 10^{100} = ***Googol***[1]

10^{Googol} = Googolplex. (bekannte Suchmaschine)

Alle endlichen Zahlen sind ein Nichts im Vergleich zur Unendlichkeit. Auf dem Weg dorthin gibt es Zahlen, die so groß sind, dass bis zum Ende aller Zeiten kein Mensch in der Lage sein wird, sie zu beschreiben.

Unendlich kleine Größen

Isaac Newton (1643 - 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716): Mathematische Revolution, Erfindung der ***Infinitesimalrechnung***.

Notationen von Leibniz setzen sich durch. Beim Differentialquotienten dy/dx werden zwei unendlich kleine Größen (die „Differentiale" dx und dy) durcheinander geteilt. Obwohl eine exakte Definition kaum gegeben werden konnte, führte der formale Kalkül zum Erfolg.

In den folgenden Jahrhunderten: Solide Begründung der Differential- und Integralrechnung, Verbannung der unendlich kleinen Größen, Arbeit mit dem potenzial Unendlichen im Stile Euklids.

Zwischenstation Carl Friedrich Gauß: explizit gegen eine Arbeit mit dem aktual Unendlichen, aber noch ungenierte Nutzung der Differentiale.

Bemühungen, das Infinitesimale durch Betrachtungen im Endlichen zu begründen, führten zur „Epsilontik": Soll etwa ausgedrückt werden, dass sich eine Folge von Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ einem „Grenzwert" a beliebig gut annähert, so formuliert man das wie folgt:

> *Ist irgendeine (noch so kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so kann man eine Nummer n_0 finden, so dass sich die Zahlen a_n für $n \geq n_0$ um weniger als ε von a unterscheiden.*

Generationen von Mathematik-Anfängern haben sich inzwischen schon damit herumgeärgert, mit dieser Methode Grenzwerte zu berechnen.

[1] Die Namensgebung stammt von Kasners neunjährigem Neffen.

2 Mengen und Abbildungen

Cantors Mengenbegriff

Rückblick im 19. Jahrhundert: Die seit Pythagoras (600 v.Chr.) tickende Zeitbombe „irrationale Zahlen“.

Eine ***rationale Zahl*** ist ein Bruch p/q mit ganzzahligem Zähler und Nenner. Die Diagonale d eines Quadrates der Seitenlänge $a = 1$ besitzt nach dem Satz des Pythagoras ($a^2 + a^2 = d^2$) die Länge $\sqrt{2}$, und das ist keine rationale Zahl. In diesem Sinne sind irrationale Zahlen real existierende Größen.

Leopold Kronecker (1823 - 1891) weigerte sich immer noch, die Existenz irrationaler Zahlen anzuerkennen. Er war von seinem eigenen Schüler Georg Cantor (1845 - 1918) stark enttäuscht, als dieser begann, sich mit den Grundlagen der Analysis zu beschäftigen.

Worin bestanden die ketzerischen Gedanken Cantors? Es beginnt ganz harmlos mit einer

Definition: Unter einer ***Menge*** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ***Elemente*** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Solche Zusammenfassungen gab es auch schon vor Cantor. Neu ist die Vorstellung von einer „Menge“ als einem neuen Objekt, mit dem man wieder weiterarbeiten und das man sogar als Element einer übergeordneten Menge benutzen kann.

Ist x Element der Menge M, so schreibt man $\boxed{x \in M}$.

Zwei Mengen M und N heissen ***gleich*** (in Zeichen: $M = N$), wenn sie die gleichen Elemente besitzen. Eine Menge T heißt ***Teilmenge*** der Menge M (in Zeichen: $T \subset M$), wenn jedes Element von T auch ein Element von M ist. Es gibt genau eine ***leere Menge*** $\varnothing$. Das ist die Menge, die kein Element enthält.

Sei M die Menge, die aus den Zahlen 1, 2 und 3 besteht. Man schreibt dann $M := \{1, 2, 3\}$.

Bestimmung aller Teilmengen von M:

- Die leere Menge $\varnothing$.
- Alle 1-elementigen Teilmengen: $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$.
- Alle 2-elementigen Teilmengen: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$.
- Die Menge M selbst.

Zusammen sind das $8 = 2^3$ Teilmengen.

Definition: Ist M eine Menge, so bezeichnet man die Menge aller Teilmengen von M mit $P(M)$ und nennt sie die ***Potenzmenge*** von M.

Damit gilt:

$$P(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Es gehört zu den Grundprinzipien der Mengenlehre, dass jede Menge eine Potenzmenge besitzt, also z.B. auch die leere Menge:

$$P(\varnothing) = \{\varnothing\}.$$

Bildet man $P(P(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))$ usw., so bekommt man immer größere Mengen.

Abbildungen

Die weiteren Ideen Cantors beruhen auf dem Begriff der Abbildung.

Definition: Eine ***Abbildung*** f zwischen Mengen M und N ist eine Zuordnung $f : M \to N$, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y = f(x) \in N$ zuordnet.

Anschauliche Vorstellung: Von jedem Element $x \in M$ wird eine Schnur zu einem Element $f(x) \in N$ gespannt.[2]

Definition: Eine Abbildung heißt ***bijektiv***, falls die Zuordnung umkehrbar ist, falls also auch jedem $y \in N$ genau ein $x \in M$ zugeordnet ist, so dass $f(x) = y$ ist.

Anschaulich: Ist $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung, so endet bei jedem $y \in N$ genau eine Schnur.

Endliche und unendliche Mengen

Eine Menge M heißt ***endlich***, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to M$ gibt. Die Zahl n nennt man dann die ***Mächtigkeit*** oder ***Kardinalität*** von M.

$T \subset M$ ist eine ***echte Teilmenge***, wenn T weniger Elemente als M enthält. Ist M endlich, so hat eine echte Teilmenge T kleinere Kardinalität. Es gibt daher keine bijektive Abbildung von einer endlichen Menge auf eine echte Teilmenge.

Ganz anders ist die Situation bei unendlichen Mengen. Sei

$$G := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade }\}$$

die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Dann ist G eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ und die Abbildung $f : \mathbb{N} \to G$ mit $f(n) = 2n$ ist bijektiv (die umgekehrte Zuordnung wird durch Division geliefert). Man kann unendliche Mengen sogar dadurch charakterisieren, dass es eine bijektive Abbildung auf eine echte Teilmenge gibt.

[2] Es kann Elemente $y \in N$ geben, bei denen keine Schnur endet, und es kann Elemente y geben, bei denen mehrere Schnüre enden.

Die Kardinalität ist eine Eigenschaft von Mengen, so wie die Farbe eine Eigenschaft von Gegenständen ist. Will man jemandem erklären, was die Farbe „Blau" ist, so zeigt man ihm alle Gegenstände, die blau sind. Will man eine bestimmte Kardinalität einführen, so gibt man die Gesamtheit aller Mengen mit dieser Kardinalität an (Vorsicht, diese Gesamtheit ist keine Menge!).

Definition: Sei M eine beliebige Menge. Unter der ***Kardinalität*** von M versteht man die Gesamtheit aller Mengen N, für die es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt. Man bezeichnet diese Kardinalität mit $|M|$. Jede der Mengen N nennt man einen Repräsentanten von $|M|$.

Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ bezeichnet man mit $\aleph_0$ („Aleph-Null").[3] Eine Menge M heißt ***abzählbar***, wenn sie die Kardinalität $\aleph_0$ hat, wenn es also eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

Abzählbare Mengen kann man als Folgen schreiben:

$$M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Sind A und B zwei Mengen, so ist die ***Vereinigungsmenge*** von A und B die Menge

$$A \cup B := \{x : x \text{ ist in wenigstens einer der beiden Mengen } A \text{ oder } B \text{ enthalten}\}.$$

Die ***Schnittmenge*** von A und B ist die Menge

$$A \cap B := \{x : x \text{ ist gleichzeitig Element von } A \text{ und von } B\}.$$

Die Mengen heißen ***disjunkt***, falls $A \cap B = \varnothing$ ist.

Nun können wir Kardinalitäten addieren. Ist $A \cap B = \varnothing$, so ist

$$|A| + |B| := |A \cup B|.$$

Für endliche Kardinalitäten erhält man so die gewöhnliche Addition von natürlichen Zahlen.

Ist $|M| = n$, so ist $|P(M)| = 2^n$. Deshalb definiert man für beliebige Mengen:

$$2^{|M|} = |P(M)|.$$

[3] Aleph ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets.

3 Cantor und das aktual Unendliche

Hilberts Hotel

Hilberts Hotel ist ein modernes Haus in landschaftlich herrlicher Lage, also sehr beliebt. Das besondere: Hilberts Hotel hat unendlich viele Zimmer.

Gleich nach der Eröffnung im Frühjahr erschienen die ersten beiden Gäste und belegten die Zimmer mit den Nummern 1 und 2. Eine Stunde später stand eine Wandergruppe mit unendlich vielen Mitgliedern vor der Tür. Der erste Wanderer bekam Zimmer 3, der zweite Wanderer Zimmer 4, usw. Nun war das Hotel voll. Als aber gegen Abend noch ein weiterer einsamer Wanderer vorbeikam, packte den Hotelchef das Mitleid und er sorgte für Platz. Jeder Gast wurde gebeten, ein Zimmer weiter zu ziehen, Gast 1 in Zimmer 2, Gast 2 in Zimmer 3 usw. In dem freigewordenen Zimmer Nr. 1 wurde der späte Wanderer untergebracht.

Weil die Gegend so schön ist, wollte am nächsten Tag keiner ausziehen. Zugleich hatte sich eine Gruppe von unendlich vielen Psychologen angesagt, die einen Kongress über Verteilungsproblematiken abhalten wollten. Dem Chef blieb nichts anderes übrig, als wieder seine Gäste zu belästigen. Diesmal bat er den Bewohner von Zimmer 1, in Zimmer 2 umzuziehen, den Bewohner von Zimmer 2 in Zimmer 4, den von Zimmer 3 in Zimmer 6 usw. Schließlich waren alle Zimmer mit ungeraden Nummern frei, und die Psychologen konnten unterkommen.

Eine Woche später - das Hotel war wieder leer - hatte sich der Dachverband der Rationalisten mit seinen unendlich vielen Bezirksverbänden angesagt, von denen jeder unendlich viele Mitglieder hat. „Schwierig,“ dachte der Chef, „aber da gab's doch einen Trick.“ Und tatsächlich gelang es, alle Gäste unterzubringen. Wie?

Nach dem Auszug der Rationalisten war das Personal mit seinen Kräften am Ende. Viel Zeit zum Verschnaufen blieb aber nicht, denn das Telefon klingelte und der Vorsitzende der Parteil der Realisten wollte das Hotel für das nächste Wochenende reservieren. „Wir sind ziemlich viele!“, sagte der Vorsitzende. „Unsere Mitglieder rekrutieren sich aus 10 Berufsgruppen. Jeder Ortsverband hat unendlich viele Funktionäre, die wir nach ihrer Wichtigkeit durchnummerieren. Und wir haben so viele Ortsverbände, dass jede denkbare Verteilung von Berufen auf Funktionärs-Positionen vorkommt. Aber wir brauchen keine Einzelzimmer. Die Funktionäre eines Ortsverbandes teilen sich jeweils gerne ein Zimmer.“

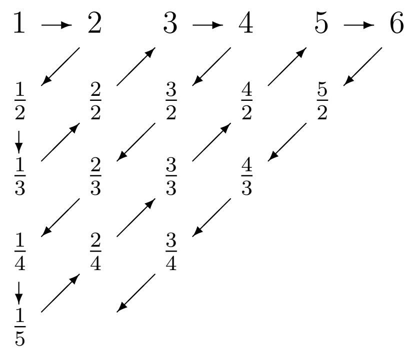
„Verstehe,“ sagte der Chef, „da muss ich erst mal einen Belegungsplan entwerfen. Ich rufe Sie dann zurück.“ Der Hotelchef knobelte den ganzen Abend und die ganze Nacht und musste schließlich aufgeben. Diese gewaltige Menge von Gästen war nicht unterzubringen. Warum nicht?

Cantors Diagonalverfahren

Die Menge $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ ist abzählbar. Das ist offensichtlich. Aber auch größere Mengen sind abzählbar.

Satz *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis: Dieses verblüffende Ergebnis erhält man mit Hilfe des sogenannten ***Cantor'schen Diagonalverfahrens***:



Durchläuft man das obige Diagramm entlang der Pfeile und lässt man dabei die überflüssigen Zahlen weg, so erhält man eine Abzählung der positiven rationalen Zahlen. Fügt man nun (wie bei $\mathbb{Z}$) am Anfang die 0 und hinter jedem q sofort die Zahl $-q$ ein, so erhält man eine Abzählung aller rationalen Zahlen. ∎

Auf diese Weise kommt der Verband der Rationalisten in Hilberts Hotel unter.

Reelle Zahlen

Rationale und irrationale Zahlen ergeben zusammen die Menge $\mathbb{R}$ der ***reellen Zahlen***. Die kann man sich als unendliche Dezimalbrüche vorstellen. Eine reelle Zahl ist genau dann rational, wenn die Dezimalbruchentwicklung periodisch ist.

Cantor stellte am 29. November 1873 in einem Brief an den Braunschweiger Mathematiker Richard Dedekind sinngemäß die folgende Frage:

> „Kann man die Gesamtheit der natürlichen Zahlen so der Gesamtheit der positiven reellen Zahlen zuordnen, dass jeder natürlichen Zahl n eine und nur eine reelle Zahl entspricht?"

Er wollte wissen, ob die Menge $\mathbb{R}$ abzählbar ist. Die Antwort darauf konnte er bald selbst geben. Sie überraschte die ganze mathematische Welt.

Satz *Die Menge aller reellen Zahlen zwischen* 0 *und* 1 *ist* ***nicht abzählbar!***.

Beweis: Jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 kann als unendlicher Dezimalbruch der Form $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ geschrieben werden.

Könnte man diese Zahlen abzählen, so hätte man eine Folge

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \mathbf{a_{11}} a_{12} a_{13} \ldots, \\ x_2 &= 0, a_{21} \mathbf{a_{22}} a_{23} \ldots, \\ x_3 &= 0, a_{31} a_{32} \mathbf{a_{33}} \ldots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

In dieser Folge müssten **alle** reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorkommen. Die Ziffern a_{ij} nehmen dabei wie üblich Werte zwischen 0 und 9 an.

Nun wird eine reelle Zahl $y = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$ wie folgt konstruiert:

$$\text{Es sei} \quad c_i := \begin{cases} 5 & \text{falls } a_{ii} \neq 5 \\ 4 & \text{falls } a_{ii} = 5 \end{cases}$$

Auch y liegt zwischen 0 und 1 und muss unter den Folgegliedern $x_1, x_2, x_3, \dots$ vorkommen. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $y = x_n$ ist. Dann ist $c_n = a_{nn}$, was einen Widerspruch zur Definition der c_i ergibt. ■

Es gibt also qualitative Unterschiede zwischen unendlichen Mengen. Insbesondere gibt es „viel mehr" irrationale Zahlen als rationale.

Als Cantors Lehrer Kronecker erfuhr, mit welch zweifelhaften Dingen sich sein ehemaliger Schüler beschäftigte, beschimpfte er ihn als „Jugendverderber" und brach den Kontakt mit ihm ab.

Transfinite Zahlen

Die endlichen Zahlen kann man als Kardinalzahlen endlicher Mengen auffassen. Nun ging Cantor dazu über, auch die Kardinalzahlen unendlicher Mengen als Zahlen zu betrachten, als sogenannte ***transfinite Zahlen***. Solche Zahlen kann man zwar auch addieren, aber die Ergebnisse sind nicht unbedingt das, was man erwartet. So ist z.B. $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ und auch $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Auf diese Weise war bei Cantor das aktual Unendliche Wirklichkeit geworden, unendliche Mengen wurden zu ganz gewöhnlichen Objekten, mit denen man wie mit Zahlen rechnen konnte.

Stufen der Unendlichkeit

Ist M eine endliche Menge mit n Elementen, so hat die Potenzmenge $P(M)$ genau 2^n Elemente, $P(P(M))$ also 2^{2^n} Elemente usw. Egal, wie weit man das treibt, man bleibt im Bereich der endlichen Zahlen. Keine der üblichen Mengenkonstruktionen führt aus den endlichen Mengen heraus. Die transfiniten Zahlen sind aus der Sicht der endlichen Zahlen unerreichbar.

Gibt es eine bijektive Abbildung von einer (beliebigen) Menge M auf eine Teilmenge von N, so ist $|M| \leq |N|$. Gibt es zugleich **keine** bijektive Abbildung von M auf N, so ist $|M| < |N|$. Wir wissen z.B., dass $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ ist. Und mit Hilfe eines ähnlichen Tricks wie beim Diagonalverfahren kann man zeigen, dass immer $|M| < |P(M)|$ ist.

Speziell ist $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. Aber es ist auch $|P(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$. Was sollen das für Mengen sein, deren Kardinalität eine größere Stufe von Unendlichkeit beschreibt als die der reellen Zahlen? Man könnte vermuten, dass die Menge der Punkte einer Ebene eine höhere Kardinalität hat als die reelle Zahlengerade, und die Menge der Punkte im Raum eine noch höhere. Doch Cantor machte eine bestürzende Entdeckung: Die Cardinalität der Ebene, des Raumes usw. ist nicht größer als die der Geraden. „Ich sehe es, aber ich kann es nicht glauben!“ schrieb er an seinen Freund Dedekind.

Die Kardinalität von $P(\mathbb{R})$ wird von der Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ erreicht. Und da man ja Potenzmengen von Potenzmengen von Potenzmengen bilden kann, reißt die Folge der immer größer werdenden Unendlichkeiten nicht ab! Cantor sprach von den „Alephs“.

Viel Zeit ist seit Cantors Entdeckungen vergangen, es gibt mancherlei neue Erkenntnisse und Fragen, die aber höchstens noch Spezialisten zugänglich sind.

So, wie die unendlichen Kardinalzahlen von den endlichen aus unerreichbar sind, so spricht man inzwischen von sogenannten „großen Kardinalzahlen“, die von den Alephs aus nicht erreichbar sind. So abstrus diese Vorstellung erscheint, so scheint eine derartige Theorie doch geeignet zu sein, rückwirkend Probleme im Bereich der Alephs zu lösen.

4 Die Kontinuumshypothese

Wohlordnung und Ordnungszahlen

Cantor ging nun daran, geordnete Mengen zu betrachten, in denen für je zwei Elemente x und y entschieden werden kann, ob $x < y$, $x = y$ oder $x > y$ ist. Man nennt sie ***total geordnet***. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind solche Mengen.

Eine total geordnete Menge nennt man ***wohlgeordnet***, wenn es zu jedem Element (das nicht schon das größte ist) ein nächst-größeres gibt.

Jede **endliche** Menge kann problemlos mit einer Wohlordnung versehen werden. Die Menge $\mathbb{N}$ ist ein Beispiel für eine **unendliche** wohlgeordnete Menge, die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist **nicht** wohlgeordnet.

Zwei wohlgeordnete Mengen heißen ***ähnlich***, falls es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt, die die Ordnung respektiert. Die Gesamtheit aller zu einer festen Menge ähnlichen Mengen bezeichnet man als eine ***Ordnungszahl***.

Eine wohlgeordnete endliche Menge mit n Elementen ist der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ähnlich. Deshalb ist eine endliche Ordnungszahl nichts anderes als eine natürliche Zahl. Jede endliche Zahl ist kleiner als die Ordnungszahl ω der Menge $\mathbb{N}$.

Über die Ordnungszahlen lassen sich Mengen leichter der Größe nach sortieren. Offensichtlich gehört zu jeder Ordnungszahl eine Kardinalzahl. Cantor vermutete, dass umgekehrt jede Menge mit einer Wohlordnung versehen werden kann („Wohlordnungssatz“) und schloss daraus, dass sich auch die Kardinalzahlen wohlordnen lassen. Das ergab die Folge der Alephs: $\ldots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$

Wir wissen schon, dass $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ ist. Cantor stellte sich nun die Frage:

> Ist $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$?

Anders ausgedrückt: Gibt es eine Menge mit größerer Kardinalität als $\mathbb{N}$ und kleinerer Kardinalität als $\mathbb{R}$? Die Gleichung $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ bekam den Namen „Kontinuumshypothese“.

Ab 1884 verbrachte Cantor viel Zeit mit dem Kampf um einen Beweis seiner Hypothese. Immer, wenn er daran arbeitete, wurde er von schweren Depressionen heimgesucht. Lange Sanatoriumsaufenthalte waren erforderlich, und am 6.1.1918 verstarb er abgemagert und völlig erschöpft in der Universitätsklinik.

Axiomatik und Wohlordnungssatz

Als Cantors Theorien bekannt wurden, fanden sich auch schnell Kritiker. 1903 veröffentlichte der englische Philosoph Russell die von ihm entdeckten Antinomien (Paradoxa). Besonders bekannt ist die Geschichte vom Barbier:

> Es war einmal ein Dorfbarbier, der hängte in sein Fenster ein Schild mit folgender Aufschrift:

„Ich rasiere jeden Mann im Ort, der sich nicht selbst rasiert!“

Das ging so lange gut, bis ein Fremder in den Ort kam und ihn fragte, ob er sich denn selbst rasiere. „Ja“, wollte der Barbier sagen, als ihm plötzlich Bedenken kamen. Rasierte er sich wirklich selbst, so dürfte er sich — des Schildes wegen — nicht rasieren. Rasierte er sich aber nicht selbst, so müsste er sich eben doch rasieren.

Seit der Zeit vernachlässigte der Barbier sein Geschäft immer mehr und grübelte nur noch darüber nach, ob er sich nun rasieren sollte oder nicht.

Die Moral davon ist, dass die Bildung der Menge aller Mengen zu logischen Widersprüchen führt. Für Cantor war das weder neu noch überraschend, er hatte immer die Bildung solcher„Unmengen“ abgelehnt.

Klar wurde aber, dass ein Axiomensystem für die Mengenlehre aufgestellt werden musste. Der Mathematiker Ernst Zermelo versuchte dies als erster. Er bewies u.a. den von Cantor vermuteten ***Wohlordnungssatz***. Als Hilfsmittel brauchte er das sogenannte ***Auswahlaxiom***, das es erlaubte, aus unendlich vielen Mengen jeweils ein Element auszuwählen und dann die ausgewählten Elemente zu einer Menge zusammenzufassen. Dieses Axiom stieß bei vielen Mathematikern auf heftige Kritik. Es war aber auch klar, dass ein Beweis der Kontinuumshypothese ohne den Wohlordnungssatz nicht möglich sein würde.[4]

Gödel und Cohen

In Wien arbeitete der Mathematiker Kurt Gödel an Fragen der Logik und der Grundlagen der Mathematik. Er bewies 1938, dass das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese in ZF nicht widerlegbar sind. 1939 ging er nach Princeton, wo er viele Jahre mit Versuchen verbrachte, die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese zu beweisen. Im letzten Jahrzehnt seines Lebens zog er sich immer mehr zurück, entwickelte eine starke Paranoia, wurde immer verwirrter und starb schließlich 1978 an Unterernährung.

1963 bewies der Amerikaner Paul Cohen, dass die Kontinuumshypothese in ZFC nicht bewiesen werden kann. Er erhielt als erster und einziger Mathematiker die Fields-Medaille für eine Arbeit über die Grundlagen der Mathematik.

[4]Das Axiomensystem Z von Zermelo wurde später von Fraenkel und Skolem zum System ZF vervollständigt, wobei zunächst das Auswahlaxiom herausgenommen wurde. Zusammen mit dem Auswahlaxiom (axiom of choice) ergab sich das System ZFC, in dem bis heute kein Widerspruch gefunden wurde.

Literaturverzeichnis:

Amir D. Aczel: Die Natur der Unendlichkeit - Mathematik, Kabbala und das Geheimnis des Aleph, Rowohlt Taschenbuch 2002.

Josef Breuer: Einführung in die Mengenlehre, Schroedel/Schöningh 1972.

Richard Courant / Herbert Robbins: Was ist Mathematik? Springer-Verlag 1992.

John W. Dawson jr.: Kurt Gödel - Leben und Werk, Springer-Verlag Wien 1999.

Oliver Deiser: Einführung in die Mengenlehre, Springer-Verlag 2002.

Euklid: Die Elemente, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 235, Verlag Harri Deutsch 1996.

Klaus Fritzsche: Mathematik für Einsteiger, 4. Auflage, Spektrum-Verlag 2007.

Walter Purkert / Hans Joachim Ilgauds: Georg Cantor, Birkhäuser Verlag 1987.

Rudolf Taschner: Das Unendliche - Mathematiker ringen um einen Begriff, Springer-Verlag 2006.