Mathematisches Kaleidoskop

– WS 2001 / 02 –

K. Fritzsche

27.11.01 und 04.12.01

Ein Hauch von Unendlichkeit

Es geht um die Theorie der *unendlichen Reihen*, also darum, wie man unendlich viele Zahlen sinnvoll addieren kann. So wird das Rätsel um den Wettlauf des Achilles mit der Schildkröte gelöst und der Umgang mit unendlichen Dezimalbrüchen auf eine solide Basis gestellt. Die *harmonische Reihe*, die Addition aller Stammbrüche 1/2, 1/3, 1/4 usw., führt zu keinem endlichen Ergebnis. Trotzdem hätte alle Zeit der Welt nicht ausgereicht, um sich das wenigstens andeutungsweise von einem Computer bestätigen zu lassen. Um das zu zeigen, benötigt man den *natürlichen Logarithmus*, der dafür auf rein geometrische Weise eingeführt werden wird. Außerdem sollen für Reihen mit positiven Gliedern brauchbare Konvergenzkriterien gefunden werden, und es soll das eigenartige Verhalten von Reihen, deren Glieder wechselndes Vorzeichen aufweisen, demonstriert werden.

Die unendlichen Reihen bilden standardmäßig den Ausgangspunkt für eine exakte Behandlung der Analysis und der darauf aufbauenden Zweige der höheren Mathematik.

Kapitel 1 Achilles und die Schildkröte

§ 1 Ein Wettlauf in der Antike

Unendlich viele Summanden kann man nicht wirklich addieren, aber man kann eine Strecke von endlicher Länge aus unendlich vielen Teilstrecken zusammensetzen.

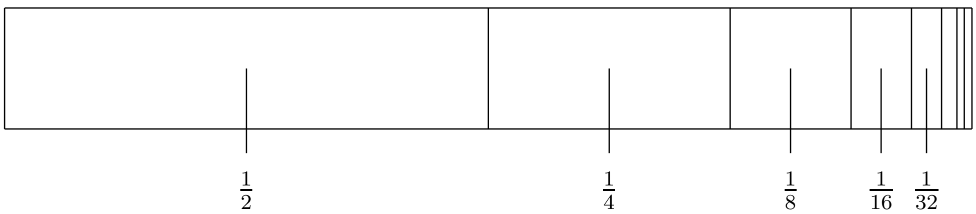
Für die griechischen Philosophen war das ein unlösbarer Widerspruch. Zenon von Elea (ca. 495-430 v.Chr.) versuchte mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte zu beweisen, daß es in Wirklichkeit keine Bewegung gäbe:

Eines Tages wollte der sportliche Achilles mit der langsamen Schildkröte um die Wette laufen. Da er zehn mal so schnell wie die Schildkröte laufen konnte, ließ er ihr einen Vorsprung von 1000 Schritten. Diesen Vorsprung hatte er zwar schnell eingeholt, aber indessen war die Schildkröte 100 Schritte weitergekrochen. Nachdem Achilles diese 100 Schritte zurückgelegt hatte, war seine Gegnerin 10 Schritte vor ihm. Und so ging es weiter. Jedesmal, wenn der Held den letzten Vorsprung eingeholt hatte, war ihm die Schildkröte wieder um ein Zehntel dieses Betrages „davongeeilt".

Die Logik, so meinte Zenon, zeige, daß Achilles seine Gegnerin nie hätte einholen können. Da der Augenschein das Gegenteil beweise, müsse dieser Augenschein trügen, jede Bewegung sei nur Illusion.

§ 2 Exhaustion

Die „Addition" der unendlich vielen Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ kann man sich graphisch veranschaulichen:



Es leuchtet ein, daß man auf diese Weise schließlich das ganze „Intervall" von 0 bis 1 ausschöpft. In gewissem Sinne ist also

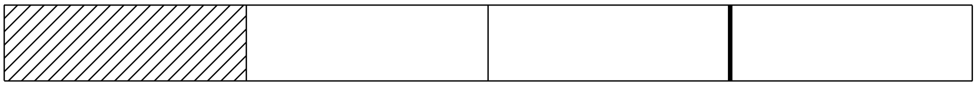
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 1\,.$$

Etwas komplizierter ist die folgende Aussage:

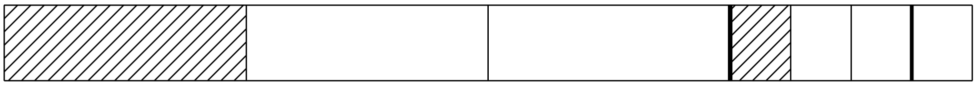
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{1}{3}\,.$$

Wie kann man das sehen? Diesmal versuchen wir, ein Drittel des Intervalls von 0 bis 1 auszuschöpfen.

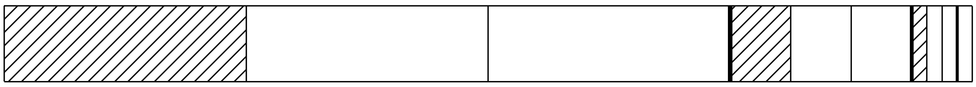
1. Schritt: $\frac{1}{4}$ ist der dritte Teil des Intervalls von 0 bis $\frac{3}{4}$. Damit hat man aus diesem Intervall schon genug herausgenommen.



2. Schritt: $\frac{1}{16}$ ist der dritte Teil von drei Vierteln des restlichen Intervalls von $\frac{3}{4}$ bis 1. Damit hat man insgesamt aus dem Intervall von 0 bis $\frac{15}{16}$.



3. Schritt: $\frac{1}{64}$ ist der dritte Teil von drei Vierteln des restlichen Intervalls von $\frac{15}{16}$ bis 1.



Durch dieses Verfahren wird schließlich das ganze Intervall von 0 bis 1 ausgeschöpft, und die markierten Abschnitte ergeben genau ein Drittel davon.

§ 3 Endliche Summen

Zur Erinnerung: Jede positive *reelle Zahl* kann als endlicher oder unendlicher Dezimalbruch geschrieben werden (z.B. 37 oder $1,25$ oder $0,33333\ldots$ oder $1,4142136\ldots$). Bricht die Dezimalbruchentwicklung ab oder wird sie irgendwann periodisch, so kann man die Zahl auch als Bruch schreiben, und man spricht von einer *rationalen Zahl*. Ist die Entwicklung nicht periodisch (wie etwa bei $\sqrt{2}$ oder π), so spricht man von einer *irrationalen Zahl*.

Eine endliche Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ von reellen Zahlen schreibt man auch in der Form

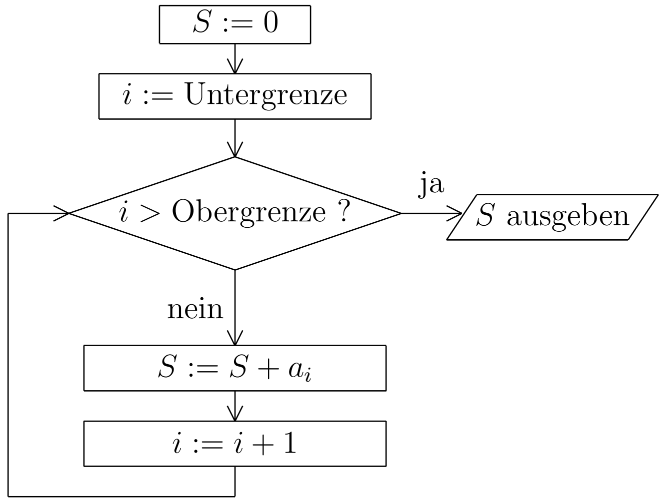
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \,.$$

Man nennt i den *Laufindex*, 1 die *Untergrenze* und n die *Obergrenze* der Summe. Der Term a_i wird als *allgemeines Glied* der Summe bezeichnet.

Statt mit der 1 kann man auch mit einer anderen Untergrenze beginnen. So ist z.B.

$$\sum_{i=3}^{7} a_i = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7.$$

Wer programmieren kann, mag sich unter einer Summe eine kleine Schleife vorstellen, in der bei jedem Schleifendurchgang ein weiterer Term addiert wird:



Beispiele.

1. $\sum_{i=1}^{n} i$ steht für $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Zur Berechnung der Summe faßt man die Glieder der Summe paarweise zusammen. So erhält man (zumindest für gerades n) genau $n/2$ Terme, die alle $n + 1$ ergeben:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i &= \big[1+n\big] + \big[2+(n-1)\big] + \big[3+(n-2)\big] + \cdots + \big[\frac{n}{2} + (n - \frac{n}{2} + 1)\big] \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{(n/2)-\mathrm{mal}} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Damit ist z.B. $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$.

Ist n ungerade, so bleibt die Formel richtig, denn man hat

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + \sum_{i=1}^{n-1} i = n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n + (n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Sei $q \geq 0$ eine beliebige reelle Zahl. Wir wollen

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$$

berechnen. Hier beginnt die Summe bereits bei $i = 0$, und es wird $q^0 = 1$ gesetzt. Man benutzt dazu einen netten Trick.

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=0}^{n} q^i\Big)\cdot(1-q) &= (1+q+q^2+\cdots+q^n)(1-q)\\ &= (1+q+q^2+\cdots+q^n)-(q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1})\\ &= 1-q^{n+1},\end{aligned}$$

denn alle anderen Terme heben sich weg.

Jetzt müssen wir etwas aufpassen. Ist $\mathbf{q \neq 1}$, so dürfen wir durch $q-1$ dividieren und erhalten

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Ist jedoch $\mathbf{q = 1}$, so ist stets auch $q^i = 1$, und

$$\sum_{i=0}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1+\cdot+1}_{(n+1)\text{-mal}} = n+1\,.$$

§ 4 Unendliche Reihen

Jetzt wollen wir versuchen, unendlich viele reelle Zahlen $a_i \geq 0$ zu addieren. Unsere Summation hat also keine Obergrenze. Ob das etwas Sinnvolles ergibt, sei noch dahingestellt. Die gute Nachricht ist, daß wir auf jeden Fall schon mal symbolisch eine unendliche Summe hinschreiben dürfen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

So etwas nennt man eine *unendliche Reihe*.

Das Exhaustions-Prinzip legt nahe, daß eine unendliche Reihe zumindest in gewissen Fällen ein endliches Resultat liefert, z.B.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^i = 1 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{4}\Big)^i = \frac{1}{3}\,.$$

Kann man das irgendwie beweisen?

Bei den Exhaustions-Beispielen haben wir versucht, die Zahl 1 oder einen Teil von ihr aus unendlich vielen Abschnitten zusammenzusetzen. Deshalb gab es jeweils eine Obergrenze $C > 0$, so das jede **endliche** Summe von solchen Abschnitten unterhalb dieser Grenze blieb. Das fordern wir jetzt allgemein:

Es gebe ein $C > 0$, so daß für jede endliche „Partialsumme"

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

gilt:

$$S_n \leq C\,.$$

Da alle $a_i \geq 0$ sind, werden die Partialsummen S_n bei jedem Schritt größer:

$$S_n \leq S_{n+1}.$$

Man sagt auch:

Die *Folge* der Zahlen S_n ist monoton wachsend und nach oben beschränkt.

Stellen wir uns C und die Zahlen S_n im Dezimalsystem vor und betrachten wir etwa das zweite Beispiel aus §2: Da ist

$$C = \frac{1}{3} = 0\,,3333333333333333\ldots$$

und

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4} &= 0\,,250000000000000\ldots \\ S_2 &= \frac{5}{16} &= 0\,,312500000000000\ldots \\ S_3 &= \frac{21}{64} &= 0\,,328125000000000\ldots \\ S_4 &= \frac{85}{256} &= 0\,,332031300000000\ldots \end{aligned}$$

Sei z_{11} die erste Ziffer von S_1 nach dem Komma, z_{12} die zweite Ziffer, z_{13} die dritte Ziffer, und allgemein z_{ij} die j-te Ziffer von S_i.

Es ist $z_{11} = 2$. Weil immer $S_i \leq 1/3$ ist, muß z_{i1} immer unterhalb von 3 bleiben. Weil die S_i monoton wachsen, kann z_{i1} bei jedem Schritt höchstens größer werden, und es kann daher höchstens einmal einen Sprung um 1 nach oben geben. Das passiert schon bei z_{21}, und danach muß z_{i1} bei 3 stehenbleiben.

Als nächstes betrachten wir die 2. Ziffer. Es ist $z_{22} = 1$. Auch diese Ziffer kann höchstens bis 3 wachsen, und das ist schon bei z_{42} passiert. Hier ist die 3. Ziffer $z_{43} = 2$. Entweder bleibt z_{i3} immer bei 2 stehen, oder irgendwann wird noch der Sprung auf 3 geschafft, und danach bleibt es bei der 3. Und so geht es weiter.

An jeder Position muß irgendwann die Ziffer konstant bleiben. Das bedeutet, daß die Zahlen S_i für $i \to \infty$ gegen eine Zahl S „konvergieren“.

4.1 Satz (von der monotonen Konvergenz). *Eine monoton wachsende und durch $C > 0$ nach oben beschränkte Folge (S_n) von reellen Zahlen konvergiert gegen einen „Grenzwert“ $S \leq C$.*

Der oben gelieferte „Beweis“ beruht auf der Darstellung der rellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche. Möchte man das vermeiden, so muß man den Satz von der monotonen Konvergenz als eine grundlegende Eigenschaft der reellen Zahlen akzeptieren. In der Literatur wird er deshalb manchmal auch als **Vollständigkeits-Axiom** bezeichnet.

Ich möchte noch erwähnen, daß eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ebenfalls konvergiert. Und das klappt auch, wenn die Folgeglieder negativ werden.

Die Partialsummen einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern bilden automatisch eine monoton wachsende Folge. Daher gilt:

4.2 Satz. *Sind die Partialsummen S_n einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern simultan durch eine reelle Zahl $C > 0$ nach oben beschränkt, so konvergiert die Reihe gegen eine reelle Zahl $S \leq C$.*

Es ist offensichtlich, daß auch folgende Umkehrung gilt: Wenn die Reihe konvergiert, dann sind die Partialsummen beschränkt.

§ 5 Grenzwerte

Uns fehlt noch eine exakte Methode zur Bestimmung des Grenzwertes. Jede (gegen eine Zahl S) konvergente unendliche Reihe kann folgendermaßen zerlegt werden:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{\text{Anfangsstück } S_n} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i}_{\text{Endstück } S-S_n}$$

Daß die Reihe gegen S konvergiert, bedeutet: Die Folge (S_n) der Partialsummen strebt gegen S, und die Endstücke $(S - S_n)$ streben gegen Null. Schreibt man letztere als Dezimalzahlen, so wird die Anzahl der Nullen hinter dem Komma immer größer. Das kann man auch folgendermaßen formulieren:

Zu jeder natürlichen Zahl N gibt es eine Nummer n_0, so daß gilt:

$$S - S_n < 10^{-N} \text{ (hat also } N \text{ Nullen hinter dem Komma), für } n \geq n_0.$$

Dies nehmen wir jetzt als Kriterium dafür, daß die Reihe gegen S konvergiert, und analog sagen wir:

Definition. Eine Folge von (positiven) Zahlen x_n konvergiert gegen Null, wenn es zu jeder natürlichen Zahl N eine Nummer n_0 gibt, so daß gilt:

$$x_n < 10^{-N} \text{ für } n \geq n_0.$$

Beispiel.

Sei $q > 1$ eine reelle Zahl. Dann können wir schreiben: $q = 1 + h$, wobei $h > 0$ ist. Nun muß ich an die binomische Formel erinnern:

$$\begin{aligned}
(1+h)^1 &= 1+h,\\
(1+h)^2 &= 1+2h+h^2,\\
(1+h)^3 &= 1+3h+3h^2+h^3\\
\text{und allgemein } (1+h)^n &= 1+nh+ \text{ Terme, die zusammen} > 0 \text{ sind.}
\end{aligned}$$

Ist eine natürliche Zahl N gegeben, so kann man sicher n_0 so groß wählen, daß $q^n = (1+h)^n > 1+nh = 1+\underbrace{h+h+\cdots+h}_{n\text{-mal}} > 10^N$ für $n \geq n_0$ ist.

Ist nun $0 < q < 1$, so ist $\frac{1}{q} > 1$, und zu jedem N gibt es ein n_0, so daß $\left(\frac{1}{q}\right)^n > 10^N$ für $n \geq n_0$ ist. Geht man zu den Kehrwerten über, so ist $q^n < 10^{-N}$ für $n \geq n_0$. Das bedeutet:

$$\text{Ist } 0 < q < 1, \text{ so konvergiert } q^n \text{ gegen Null.}$$

Ohne besondere Begründung sei noch erwähnt, daß auch $a \cdot q^n$ gegen Null konvergiert, wenn $a > 0$ eine beliebige Konstante ist.

Diese Erkenntnis wenden wir auf die Partialsummen

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

an. Setzen wir $S = \frac{1}{1-q}$, so ist

$$S - S_n = \frac{q^{n+1}}{1-q} = a \cdot q^n \ (\text{mit } a := \frac{q}{1-q}),$$

und diese Folge konvergiert gegen Null. Das bedeutet:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \quad \text{(geometrische Reihe).}$$

Speziell ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \text{ also} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1\,.$$

Und etwas allgemeiner ist (für natürliche Zahlen n und m mit $0 < m < n$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{m}{n}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{m}{n}} - 1 = \frac{n}{n-m} - \frac{n-m}{n-m} = \frac{m}{n-m}\,.$$

Die Strecke, die der sagenhafte Achilles zurücklegen mußte, um die Schildkröte einzuholen, beträgt also

$$1000 + 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = 1000 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = 1000 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{10\,000}{9} = 1\,111 + \frac{1}{9} \quad \text{Schritte.}$$

Wenden wir uns der Darstellung reeller Zahlen in Form von periodischen Dezimalbrüchen zu: Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}
0.33333\ldots &:= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots \\
&= 3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i \\
&= 3 \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i - 1\right) \\
&= 3 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\right) \\
&= 3 \cdot \left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9}\right) \quad = \quad 3 \cdot \frac{1}{9} \quad = \quad \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

§ 6 Der Vergleich von Reihen

Nicht alle Reihen lassen sich so leicht behandeln wie die geometrische Reihe. Insbesondere ist die Bestimmung des Grenzwertes in vielen Fällen schwer oder unmöglich. Manchmal kann man aber zumindest die Konvergenz nachweisen, indem man Vergleiche mit einer geometrischen Reihe herstellt.

6.1 Satz (Quotientenkriterium). *Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ eine Reihe mit positiven Gliedern. Gibt es ein q mit $0 < q < 1$, so daß $\frac{a_{i+1}}{a_i} < q$ für alle i ist, so ist die Reihe konvergent.*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt:

$$a_2 < q \cdot a_1, \quad a_3 < q \cdot a_2 < q^2 \cdot a_1 \quad \text{und allgemein } a_i < q^{i-1} \cdot a_1.$$

Da $\sum_{i=0}^{\infty} q^i \cdot a_1$ konvergiert, sind die Partialsummen von $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot q^i$ und damit auch die Partialsummen von $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ beschränkt, und auch diese Reihe ist konvergent. ∎

Es reicht schon, wenn die Quotientenbedingung ab einer Nummer n_0 gilt.

Beispiel.

Die Fakultäten $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ wachsen sehr schnell. Deshalb strebt $1/n!$ sehr schnell gegen Null, und es besteht die Hoffnung, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i!$ konvergiert. Tatsächlich ist

$$\frac{1/(i+1)!}{1/i!} = \frac{i!}{(i+1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot i \cdot (i+1)} = \frac{1}{i+1} \leq \frac{1}{2},$$

und aus dem Quotientenkriterium folgt die Konvergenz.

Über den Grenzwert können wir momentan nicht viel sagen, denn er ist eine schwer greifbare irrationale Zahl. Tatsächlich dreht man den Spieß um und definiert diese Zahl als Grenzwert der Reihe.

$$e = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \text{ heißt } \textit{Eulersche Zahl.}$$

Man kann nachrechnen, daß $e = 2,718\ldots$ ist. Es handelt sich um einen nichtperiodischen Dezimalbruch, also wirklich eine irrationale Zahl wie $\sqrt{2}$ oder π.

Kapitel 2 Harmonie und Langsamkeit

§ 1 Die harmonische Reihe

Daß unendlich viele Summanden etwas Endliches ergeben, ist schon etwas besonderes. Ganz anders sieht es bei der sogenannten „harmonischen Reihe“ aus.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Wir untersuchen ganz spezielle Partialsummen S_n, nämlich die mit der Nummer $n = 2^k$.

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4+1} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = k \cdot \frac{1}{2},$$

und dieser Ausdruck wächst über alle Grenzen. Die harmonische Reihe konvergiert also nicht!

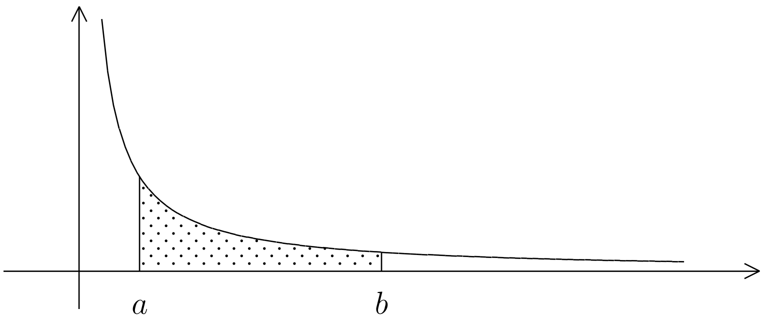
Die harmonische Reihe „divergiert“, und sie tut dies schrecklich langsam. Wie langsam, werden wir weiter unten sehen. Das hat zur Folge, daß die Reihe konvergiert, wenn man die Glieder nur ein bißchen kleiner macht. Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert, wie man an folgender Abschätzung sieht:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} &\leq 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)} \text{ (wegen } i > i-1 \text{ ist } \frac{1}{i} < \frac{1}{i-1}) \\
&= 1 + \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \Big) \\
&= 1 + \big(1 - \frac{1}{2}\big) + \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\big) + \cdots + \big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\big) \\
&= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.
\end{aligned}$$

Der Grenzwert ist übrigens $\frac{\pi^2}{6}$, ein Resultat, für das man etwas mehr höhere Mathematik braucht.

§ 2 Der natürliche Logarithmus

Wir betrachten die Funktion $y = \frac{1}{x}$ über der positiven x-Achse.

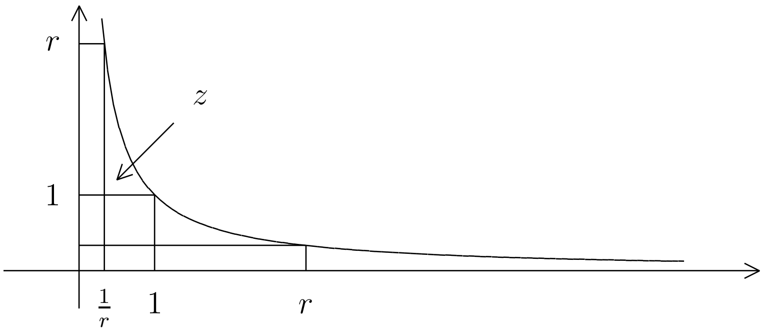


Ist $0 < a < b$, so bezeichne $A_{a,b}$ die Fläche zwischen $x = a$ und $x = b$ unter dem Graphen von $y = 1/x$. Ist $a > b$, so setzen wir $A_{a,b} := -A_{b,a}$. Außerdem sei $A_{a,a} = 0$. Offensichtlich gilt:

$$A_{a,b} + A_{b,c}, \text{ für } a < b < c\,.$$

2.1 Satz. *Für $r > 1$ ist $A_{1,r} = A_{1/r,1}$.*

Beweis:



Wir benutzen, daß der Graph der Funktion $y = 1/x$ symmetrisch zur Winkelhalbierenden $x = y$ ist. Damit ist

$$\begin{aligned} A_{1/r,1} &= z + \big(1 - \frac{1}{r}\big) \cdot 1 \;=\; z + 1 - \frac{1}{r} \\ \text{und} \quad A_{1,r} &= z + \frac{1}{r} \cdot (r-1) \;=\; z + 1 - \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

∎

Es ist klar, daß die Formel dann auch für $0 < r < 1$ gilt.

Definition. Ist $x > 0$, so nennt man $\ln(x) = A_{1,x}$ den *natürlichen Logarithmus* von x.

2.2 Satz. *Es ist* $\ln(1) = 0$ *und* $\ln\big(\frac{1}{x}\big) = -\ln(x)$.

Beweis: Die erste Behauptung ist trivial. Die zweite ergibt sich aus

$$\ln(1/x) = A_{1,1/x} = -A_{1/x,1} = -A_{1,x} = -\ln(x).$$

∎

2.3 Satz.

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y).$$

Diese charakteristische Eigenschaft des Logarithmus ist etwas schwieriger zu sehen.

Hier ist eine Andeutung des Beweises: Teilt man das Intervall von 1 bis x in n gleiche Teile, so haben diese die Länge $(x-1)/n$. Über dem Teilungspunkt $a_k = 1 + k \cdot (x-1)/n$ nimmt $y = 1/x$ den Wert $1/a_k$ an, und die n Rechtecke über den Intervallen von a_k bis a_{k+1} mit Höhe $1/a_k$ (für $k = 0, 1, \ldots, n-1$) approximieren die Fläche $A_{1,x}$.

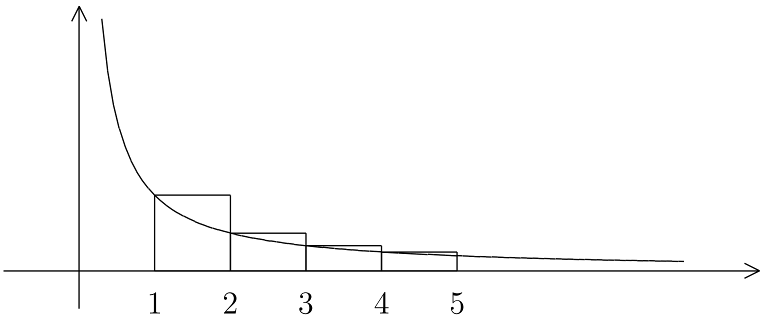
Genauso kann man die Fläche unter $y = 1/x$ zwischen y und xy (also $A_{1,xy} - A_{1,y}$) durch n Rechtecke approximieren. In beiden Fällen ergibt die Summe der Rechtecksflächen den gleichen Wert. Man schließt daraus, daß auch nach Übergang zum Grenzwert ($n \to \infty$) die Flächen gleich bleiben, daß also $A_{1,x} = A_{1,xy} - A_{1,y}$ ist. Das ergibt die Behauptung. ■

Als **Folgerung** ergibt sich:

$$\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}} = \ln(x) + \cdots + \ln(x) = n \cdot \ln(x).$$

2.4 Satz. *Die Folge* $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln(n)$ *konvergiert gegen eine reelle Zahl* $C < 1$.

Beweis:



Die Summe der ersten $n-1$ Rechtecksflächen ergibt den Wert $X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$. Zieht man davon $A_{1,n} = \ln(n)$ ab, so bleiben die Stückchen der Rechtecke übrig, die oberhalb von $y = 1/x$ liegen. Deren Gesamtfläche ergibt die Zahl x_n.

Die Summe der Rest-Stückchen ist $< \dfrac{1}{2} + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}) + \cdots + (\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}) = 1 - \dfrac{1}{n} < 1$. Außerdem ist die Folge (x_n) monoton wachsend. Also muß (x_n) gegen eine Zahl $C < 1$ konvergieren. ∎

Wir können eine noch genauere Abschätzung für x_n geben. Diese Zahl ist größer als die Summe der Flächen aller Dreiecke, die sich jeweils aus den beiden Schnittpunkten von $y = 1/x$ mit einem Rechteck und der rechten oberen Ecke dieses Rechteckes ergeben. Deshalb ist $x_n > \dfrac{1}{4} + (\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6}) + \cdots + (\dfrac{1}{2(n-1)} - \dfrac{1}{2n}) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n}$. Tatsächlich ist die sogenannte „Euler-Mascheronische Konstante" $C = 0,5772\ldots$.

Die Folge $y_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ konvergiert monoton fallend von oben gegen C, denn es ist

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (A_{1,n+1} - A_{1,n}) < 0.$$

Also gilt:

$$\text{für genügend großes } n \text{ ist } S_{n-1} \approx C + \ln(n) \approx S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Wir wollen nun sehen, wann S_n größer als eine gegebene Zahl N ist. Dazu untersuchen wir, wann $\ln(n) > N$ ist.

Ist $n > 10^{N/\ln(10)}$, so ist $\ln(n) > \dfrac{N}{\ln(10)} \cdot \ln(10) = N$. Hierbei verwenden wir Eigenschaften der Logarithmusfunktion, die man nur durch tieferes Eindringen in die Theorie erhalten kann. Hierzu fehlt uns an dieser Stelle die Zeit. Das trifft auch auf das Problem zu, explizit Logarithmuswerte zu berechnen. Deshalb greifen wir zum Taschenrechner, um folgendes festzustellen:

$$\frac{1}{\ln(10)} = 0,4342944\ldots$$

Daraus ergibt sich:

$$\ln(n) > N \text{ ist gleichbedeutend damit, daß } n > 10^{N \cdot 0{,}4343} \text{ ist.}$$

Also ist $S_n > 10$, wenn $n > 10^{4{,}343} > 20\,000$ ist.

Und es ist $S_n > 100$, wenn $n > 10^{43{,}43} \approx 2{,}7 \cdot 10^{43}$ ist. Wenn wir annehmen, daß der Urknall vor 18 Milliarden Jahren stattfand, so ist dies ca. $5{,}6 \cdot 10^{17}$ Sekunden her. Hätte also ein Supercomputer seitdem versucht, in jeder Sekunde eine Billion Glieder der harmonischen Reihe zu addieren, so wäre er auch heute noch weit davon entfernt, eine Summe ≥ 100 zu erhalten.

§ 3 Alternierende Reihen

Bisher haben wir uns nur mit Reihen mit positiven Gliedern beschäftigt. Zum Schluß soll an einem Beispiel gezeigt werden, was bei einer Reihe mit beliebigen Gliedern passieren kann.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$$

heißt „alternierende harmonische Reihe“.

Auch hier untersucht man die Partialsummen, also $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i}$.

Wir wollen untersuchen, ob die Folge (S_n) konvergiert. Dabei machen wir folgende Beobachtung: Ist $u_n = S_{2n-1}$ (also $= S_1, S_3, S_5, \ldots$) und $v_n = S_{2n}$ (also $= S_2, S_4, S_6, \ldots$), so gilt:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= S_{2n+1} \\ &= S_{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \\ &< S_{2n-1} = u_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= S_{2n+2} \\ &= S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &> S_{2n} = v_n. \end{aligned}$$

Damit ist (u_n) monoton fallend und (v_n) monoton wachsend. Weil außerdem stets $S_{2n} < S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$ ist, erhalten wir die Ungleichungskette

$$v_1 < v_2 < v_3 < \ldots < v_n = S_{2n} < S_{2n+1} = u_{n+1} < \ldots < u_3 < u_2 < u_1$$

Damit ist (u_n) durch v_1 nach unten und (v_n) durch u_1 nach oben beschränkt. Also konvergiert (u_n) gegen eine Zahl u und (v_n) gegen eine Zahl v.

Weil stets $v_n < u_n$ ist, muß auch $v \leq u$ sein. Weil außerdem

$$u_n - v_n = S_{2n-1} - S_{2n} = -(-1)^{2n+1}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

gegen Null konvergiert, muß sogar $u = v$ sein. Das bedeutet, daß ganz allgemein (S_n) gegen diese Zahl konvergiert. Der Grenzwert ist schwieriger zu bestimmen, es kommt $\ln(2)$ dabei heraus.

Entscheidend hierbei ist, daß man bei der Summation die natürliche Reihenfolge einhält. Wenn man davon abweicht, kann es zu Katastrophen kommen.

Wir bezeichnen mit P_i die positiven Terme $1/(2i-1)$ der Reihe, also 1, $1/3$, $1/5$, ..., und mit $-N_i$ die negativen Terme $-1/(2i)$, also $-1/2$, $-1/4$, $-1/6$, ... Dann wählen eine beliebige Zahl z, meinetwegen $z = 37$. Die Summen $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ wachsen (wie bei der harmonischen Reihe) über alle Grenzen. Also gibt es ein erstes $n = n_1$, so daß $P_1 + \cdots + P_{n_1} > z$ ist.

Die Summen $N_1 + N_2 + \cdots + N_m$ wachsen ebenfalls über alle Grenzen. Es gibt deshalb ein erstes $m = m_1$, so daß wieder

$$(P_1 + P_2 + \cdots + P_{n_1}) - (N_1 + N_2 + \cdots + P_{m_1}) < z$$

ist.

Jetzt addieren wir wieder positive Terme $P_{n_1+1}, P_{n_1+2}, \ldots$, bis die Summe erneut z übersteigt, und dann subtrahieren wir $N_{m_1+1}, N_{m_1+2}, \ldots$, bis die Summe kleiner als z wird. So fährt man fort mit Addieren und Subtrahieren. Da die Glieder der Reihe gegen Null konvergieren, nähert man sich bei diesem Verfahren der Zahl z beliebig gut an. Das zeigt, daß die Reihe nach diesen Umordnungen gegen z konvergiert.

Dieses Phänomen tritt nicht bei allen alternierenden Reihen auf, wohl aber bei solchen, die aus divergenten Reihen mit positiven Gliedern durch Einfügen von Minuszeichen entstanden sind. In der Frühzeit der Geschichte der Reihen führte das zu vielen Trugschlüssen.

Aufgaben zu „Ein Hauch von Unendlichkeit“

Afg. 1: Beweise mit Exhaustion: Ist $m < n/2$, so ist

$$\frac{m}{n} + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^3 + \cdots = \frac{m}{n-m}.$$

Afg. 2: Zeige, daß die Folge der Zahlen $\dfrac{n-1}{n}$ monoton wächst und nach oben beschränkt ist. Überlege, wogegen diese Folge konvergiert.

Afg. 3: Eine Folge von (positiven) Zahlen x_n konvergiert gegen Null, wenn es zu jeder natürlichen Zahl N eine Nummer n_0 gibt, so daß gilt:

$$x_n < 10^{-N} \text{ für } n \geq n_0.$$

Zeige an Hand von Beispielen, daß die Folge $1/n$ in diesem Sinne gegen Null konvergiert.

Folgere daraus, daß auch die Folgen $1/\sqrt{n}$ und $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ gegen Null konvergieren.

Afg. 4: Jeder periodische Dezimalbruch kann mit Hilfe der geometrischen Reihe als eine rationale Zahl dargestellt werden.

Schreibe den periodischen Dezimalbruch $0.142857\underline{142857}\ldots$ als echten Bruch. Zeige außerdem, daß $0.99999\ldots = 1$ ist.

Afg. 5: Untersuche mit Hilfe des Quotientenkriteriums, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}$ konvergiert.

Afg. 6: Zeige durch Reihenvergleich, daß $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$ konvergiert, und versuche, den Grenzwert zu bestimmen.

Zeige, daß $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}$ divergiert.

Lösung zu AFG 1:

Im 1. Schritt teilt man das Intervall von 0 bis 1 in n gleiche Teile. Von den ersten $n-m$ Teilen werden die ersten m markiert. Das geht, weil $2m < n$ ist, also $m < n-m$. Das ergibt m/n des Gesamt-Intervalls, also $m/(n-m)$ von den ersten $(n-m)/n$.

Im zweiten Schritt teilt man das Intervall von $(n-m)/n$ bis 1 (das genau m/n umfaßt), wieder in n gleiche Teile und betrachtet wieder die ersten $n-m$ davon. Davon markiert man die ersten m, also m/n von m/n, also $(m/n)^2$. So fährt man fort, und am Schluß hat man insgesamt $m/(n-m)$ markiert.

Lösung zu AFG 2:

Die Folge $\dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$ ist offensichtlich durch 1 nach oben beschränkt, und da $1/n$ mit jedem Schritt kleiner wird, ist die Folge monoton wachsend. Man sieht, daß 1 auch der Grenzwert ist.

Lösung zu AFG 3:

Es ist z.B. $1/2 = 0,5000\ldots$, $1/3 = 0,3333\ldots$, $1/4 = 0,2500\ldots$ usw., schließlich aber $1/10 = 0,1000\ldots$ und $1/11 = 0,0909\ldots$.

Entsprechend ist $1/100 = 0,0100\ldots$, $1/101 = 0,009900990\ldots$ usw. Jetzt sieht man das allgemeine Prinzip: Ist N eine natürliche Zahl und $n_0 = 10^N + 1$, so gilt für $n \geq n_0$: $1/n \leq 1/n_0 = 0,000\ldots009\ldots < 10^{-N}$.

Ist N eine natürliche Zahl und $n_0 = 10^{2N} + 1$, so ist $1/\sqrt{n} < 10^{-N}$ für $n \geq n_0$.

Bei der letzten Folge braucht man einen Trick:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Es ist klar, daß die rechte Seite gegen Null konvergiert.

Lösung zu AFG 4:

$$\begin{aligned}
0.142857\underline{142857}\ldots &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{142857}{10^{6i}} \\
&= 142857 \cdot \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^6} \right)^i - 1 \right] \\
&= 142857 \cdot \left[\frac{1}{1 - 10^{-6}} - 1 \right] \\
&= 142857 \cdot \frac{1}{10^6 - 1} \quad = \quad \frac{142857}{999999} \\
&= \frac{15873}{111111} \quad = \quad \frac{1443}{10101} \quad \text{(Division durch 9 und durch 11)} \\
&= \frac{481}{3367} \quad = \quad \frac{37}{259} \quad \text{(Division durch 3 und durch 13)} \\
&= \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

Und es ist

$$\begin{aligned} 0.99999\ldots &= \left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}+\cdots\right) \\ &\cdots \\ &= 9\cdot\left(\frac{10}{9}-\frac{9}{9}\right) \quad = \quad 9\cdot\frac{1}{9} \quad = \quad 1. \end{aligned}$$

Lösung zu AFG 5:

Man verwendet das Quotientenkriterium. Es ist

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{(i+1)^2\cdot 2^i}{i^2\cdot 2^{i+1}} = \left(1+\frac{1}{i}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\,,$$

und dieser Ausdruck nähert sich für $i\to\infty$ der Zahl $1/2$.

Lösung zu AFG 6:

Da $i(i{+}1) > i^2$ ist, konvergiert die erste Reihe. Man kann sogar einfach den Grenzwert bestimmen:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}\,.$$

Die Partialsummen konvergieren also gegen 1.

Weil $\sqrt{i(i+1)} = \sqrt{i^2+i} \le \sqrt{i^2+2i+1} = \sqrt{(i+1)^2} = i+1$ ist, divergiert die zweite Reihe.