

Seminar zur Komplexen Analysis – SS 2008

Thema: Über eine Vermutung von Hartshorne

Termin im SS: Donnerstag, 16 -18 Uhr

Inhalt:

1. **q -konvexe Funktionen und q -konvexe Mannigfaltigkeiten**
Roitzsch (17.04.)
2. **Kohärente analytische Garben und Cohomologietheorie**
Fritzsche (24.04.)
3. **Der Endlichkeitssatz von Andreotti/Grauert**
Fritzsche (08.05.)
4. **Holomorphe Vektorbündel**
Rottmann (29.05.)
5. **Normalenbündel, Divisoren und assoziierte Geradenbündel**
Harz (05.06.)
6. **Euler-Sequenz und projektive Bündel**
Sera (12.06.)
7. **Fasermetriken und positive Bündel**
Roitzsch (19.06.)
8. **Der Satz von Schneider für Hyperflächen**
Roitzsch (26.06.)
9. **Der σ -Prozess und das Aufblasen von Untermannigfaltigkeiten**
Sera (03.07.)
10. **Der Satz von Schneider im allgemeinen Fall**
Sera (10.07.)
11. **Ersatztermin** (17.07.)
12. **Literatur**

q -konvexe Funktionen und q -konvexe Mannigfaltigkeiten (Roitzsch, 17.04.)

Literatur: (A-4), evtl. auch (A-1), aber Vorsicht: „q“ bei Leiterer ist „ $n - q + 1$ “ bei uns.

„Differenzierbar“ soll hier immer „beliebig oft differenzierbar“ heißen.

Definiere Leviform auf komplexen Mannigfaltigkeiten (unabhängig von Koordinaten $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$): Sei X eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, $x \in X$, φ eine Karte in x und f differenzierbar nahe x .

$$\text{Lev}_x(f)(\xi) := \sum_{\nu, \mu} \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(\varphi(x)) \xi_\nu \bar{\xi}_\mu, \text{ für } \xi = \sum_\nu \xi_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} \in T_x(X).$$

Definition: f heißt q -konvex in $x \in X$, falls $\text{Lev}_x(f)$ auf $T_x(X)$ höchstens $q - 1$ Eigenwerte ≤ 0 hat (also mindestens $n - q + 1$ positive).

Die q -Konvexität ist eine offene Eigenschaft.

Ist $\Phi : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, $V \subset Y$ offen, f differenzierbar auf V , $U := \Phi^{-1}(V)$ und $x \in U$. Dann gilt:

$$\text{Lev}_x(f \circ \Phi)(\xi) = \text{Lev}_{\Phi(x)}(f)(\Phi_* \xi). \quad (\text{wobei } \Phi_* : T_x(X) \rightarrow T_{\Phi(x)}(Y) \text{ die induz. Abb.})$$

Also ist die q -Konvexität invariant unter biholomorphen Abbildungen.

Satz: Sei $Y \subset X$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit, $x_0 \in Y$, $U = U(x_0) \subset X$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ q -konvex in x_0 . Dann ist auch $f|_{Y \cap U}$ in x_0 q -konvex.

Satz: f ist genau dann auf X q -konvex, wenn es zu jedem $x_0 \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und eine $(n - q + 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit $Y \subset U$ mit $x_0 \in Y$ gibt, so dass $f|_Y$ streng plurisubharmonisch ist.

Folgerung: Ist f auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X n -konvex, so kann f kein lokales Maximum besitzen.

Definition: Eine komplexe Mannigfaltigkeit X heißt q -konvex, wenn es eine stetige Funktion $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $K \subset X$ gibt, so dass $\varphi|_{X \setminus K}$ q -konvex ist und

$$X_c(f) := \{x \in X : \varphi(x) < c\} \subset\subset X \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}$$

gilt. X heißt q -vollständig, wenn $K = \emptyset$ bei passendem φ gewählt werden kann.

Definition: $H_x(\varphi) := \{\xi \in T_x(X) : (\partial\varphi)_x(\xi) = 0\}$.

Definition: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Eine offene Teilmenge $B \subset\subset X$ hat einen q -konvexen Rand, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in \partial B$ eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und eine in U differenzierbare Funktion ψ gibt, so dass gilt:

1. $B \cap U = \{x \in U : \psi(x) < 0\}$ und $(\partial f)_{x_0} \neq 0$.
2. $\text{Lev}_{x_0}(f)$ hat auf $H_{x_0}(f)$ mindestens $n - q$ positive Eigenwerte.

Satz: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Eine offene Teilmenge $B \subset\subset X$ hat genau dann einen q -konvexen Rand, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in \partial B$ eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und eine in U q -konvexe Funktion f gibt, so dass $B \cap U = \{x \in U : f(x) < 0\}$ und $(\partial f)_{x_0} \neq 0$ ist.

BEWEIS: (analog zum Fall der Levi-Konvexität, siehe Vorlesung). Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung $U = U(x_0)$, eine differenzierbare Funktion f auf U und ein $(n - q)$ -dimensionaler Unterraum $E \subset H_{x_0}(f)$, so dass $\text{Lev}_{x_0}(f)$ auf E positiv definit ist. Außerdem kann man annehmen, dass $f(x_0) = 0$ und $(\partial f)_{x_0} \neq 0$ ist. Es gibt also einen 1-dimensionalen Unterraum $F \subset T_{x_0}(X)$, so dass $H_{x_0}(f) \oplus F = T_{x_0}(X)$ ist. Sei $K := \{v \in E \oplus F : \|v\| = 1\}$ und $K_0 := \{v \in K : \text{Lev}_{x_0} f(v) \leq 0\}$. Dann gibt es eine reelle Konstante C und eine positive Konstante ε , so dass $\text{Lev}_{x_0} f \geq C$ auf K und $|(\partial f)_{x_0}|^2 \geq \varepsilon$ auf K_0 gilt. Man wähle ein $k > 0$, so dass $k \cdot \varepsilon + C > 0$ ist und setze $g_k := f \cdot \exp(kf)$. Dann ist

$$\text{Lev}_{x_0} g_k(v, v) = \text{Lev}_{x_0} f(v, v) + 2k|(\partial f)_{x_0}(v)|^2,$$

also $\text{Lev}_{x_0} g_k > 0$ auf K_0 (und erst recht auf $K \setminus K_0$). Damit ist g_k in x_0 (und damit in einer Umgebung) q -konvex. Die Umkehrung ist einfach.

Lemma: Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\mathbf{z}_0 \in \partial B$. Außerdem seien φ, ψ differenzierbare Funktionen auf einer offenen Umgebung $U = U(\mathbf{z}_0)$ mit $\{\mathbf{z} \in U : \varphi(\mathbf{z}) < 0\} = \{\mathbf{z} \in U : \psi(\mathbf{z}) < 0\} = B \cap U$. Ist $(\partial\varphi)_{\mathbf{z}_0} \neq 0$ und ψ q -konvex in $\mathbf{z}_0$, so hat $\text{Lev}_{\mathbf{z}_0}(\varphi)$ auf $H_{\mathbf{z}_0}(\varphi)$ höchstens $q-1$ Eigenwerte ≤ 0 .

BEWEIS: (A-4), Lemma I.4.9.

Satz: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $B \subset\subset X$ eine offene Teilmenge mit q -konvexem Rand. Dann gibt es eine offene Umgebung $U = U(\partial B)$ und eine q -konvexe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $B \cap U = \{x \in U : f(x) < 0\}$ ist.

BEWEIS: Man kann eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von ∂B und q -konvexe Funktionen $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ finden, so dass gilt:

$$U_i \cap B = \{x \in U_i : f_i(x) < 0\} \quad \text{und} \quad (\partial f_i)_x \neq 0 \text{ für } x \in U_i \cap \partial B.$$

Sei (ϱ_i) eine Teilung der Eins zur Überdeckung (U_i) , $U \subset X$ eine offene Umgebung von ∂B mit $U \subset \bigcup_i U_i$ und $f := \sum_i \varrho_i f_i$ auf U . Ist $x \in B$, so ist $f_i(x) < 0$ für alle i , und deshalb auch $f(x) < 0$. Sei umgekehrt $f(x) < 0$. Wäre $x \notin B$, so wäre $f_i(x) \geq 0$ für alle i und damit auch $f(x) \geq 0$. Also ist

$$\{x \in U : f(x) < 0\} = U \cap B.$$

Sei nun $x_0 \in \partial B$ ein fester Punkt, $x_0 \in U_i$ für $i \in I_0 = \{i_1, \dots, i_r\}$ und $x_0 \notin U_i$ (und damit $\varrho_i(x_0) = 0$) für $i \in I \setminus I_0$. Es gibt dann zu jedem $i \in I_0$ eine positive Funktion h_i auf einer Umgebung von x_0 in $U_i \cap U_{i_1}$ mit $f_i = h_i f_{i_1}$. Dann ist

$$(\partial f)_{x_0} = \sum_{i \in I_0} \varrho_i(x_0) (\partial f_i)_{x_0} = \left(\sum_{i \in I_0} \varrho_i(x_0) h_i(x_0) \right) \cdot (\partial f_{i_1})_{x_0}.$$

Da $\varrho_i(x_0) > 0$ für wenigstens ein $i \in I_0$ ist, ist $(\partial f)_{x_0} \neq 0$. Nach dem Lemma hat dann $\text{Lev}_{x_0} f$ auf $H_{x_0}(f)$ mindestens $n - q$ positive Eigenwerte.

Wie im Beweis zum vorigen Satz bilde man die Funktion $f_k := f e^k f$. Es gibt ein k_0 , so dass f_k für $k \geq k_0$ in x_0 (und damit auf einer offenen Umgebung von x_0) q -konvex ist. Da ∂B kompakt ist, kann man ein k finden, so dass f_k auf einer kompletten Umgebung von ∂B q -konvex ist.

Kohärente analytische Garben und Cohomologietheorie (Fritzsche, 24.04.)

Literatur: (B-2), (B-4), (B-5).

Eine analytische Garbe auf einer Mannigfaltigkeit X ist eine $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf X .

Definition: Sei $\mathcal{F}$ eine analytische Garbe über X .

1. $\mathcal{F}$ heißt *endlich erzeugt*, falls es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und Schnitte $s_1, \dots, s_q \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ gibt, die (bzw. deren Keime) in jedem Punkt $x \in U$ den Modul $\mathcal{F}_x$ über $\mathcal{O}_x$ erzeugen.
2. $\mathcal{F}$ heißt *relationsendlich*, falls gilt: Ist $U \subset X$ offen und $\varphi : \mathcal{O}^q|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$ ein surjektiver Garbenhomomorphismus, so ist die Garbe $\text{Ker}(\varphi)$ endlich erzeugt.
3. $\mathcal{F}$ heißt *kohärent*, falls $\mathcal{F}$ endlich erzeugt und relationsendlich ist.

Beispiele:

- 1) Die „Strukturgarbe“ $\mathcal{O}_X$ ist kohärent. Das folgt aus dem keineswegs trivialen Kohärenzsatz von Oka.
 - 2) Eine analytische Garbe $\mathcal{F}$ ist genau dann kohärent, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x)$ und eine exakte Garbensequenz $\mathcal{O}^p|_U \rightarrow \mathcal{O}^q|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$ gibt.
 - 3) Ist $A \subset X$ analytisch und $\mathcal{I} = \mathcal{I}(A)$ die Idealgarbe von A (bestehend aus den Keimen von holomorphen Funktionen, die auf A verschwinden), so ist $\mathcal{I}$ kohärent (Kohärenzsatz von Cartan).
 - 4) (Serre'sches Fünferlemma): Ist $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathcal{F}_4 \rightarrow \mathcal{F}_5$ eine exakte Sequenz von analytischen Garben und sind die vier äußeren Garben kohärent, so ist auch die Garbe in der Mitte kohärent.
 - 5) Die Nullgarbe ist kohärent.
 - 6) Eine Garbe $\mathcal{F}$ heißt lokal-frei, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$ und einen Garbenisomorphismus $\mathcal{O}^q|_U \cong \mathcal{F}|_U$ gibt. Offensichtlich ist $\mathcal{F}$ dann auch kohärent.
- Einer kohärenten analytischen Garbe kann man ein geometrisches Objekt zuordnen. Ist $\mathcal{F}$ eine solche Garbe über X , $U \subset X$ offen und

$$\mathcal{O}^p|_U \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^q|_U \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz, so kann man φ durch eine Matrix $(\varphi_{\nu\mu})$ von holomorphen Funktionen $\varphi_{\nu\mu} : U \rightarrow \mathbb{C}$ beschreiben. Man setzt dann

$$L(\mathcal{F})|_U := \{(x, \mathbf{w}) \in U \times \mathbb{C}^q : \sum_{\nu=1}^q \varphi_{\nu\mu}(x) w_\nu = 0 \text{ für } \mu = 1, \dots, p\}.$$

Das ist eine analytische Teilmenge von $U \times \mathbb{C}^q$, die über U in lineare Räume gefasert ist. Man kann solche lokalen Modelle zu einem globalen Raum verkleben, dem sogenannten „linearen Faserraum“ zu $\mathcal{F}$. Ist $\mathcal{F}$ lokal-frei, so haben alle Fasern die gleiche Dimension und man erhält ein „Vektorbündel“ (vgl. Vortrag 4). Im allgemeinen kann die Faserdimension aber springen.

Beispiel: Sei $\mathcal{I}$ die Idealgarbe des Nullpunktes im $\mathbb{C}^2$. Dann wird $\mathcal{I}$ durch die Koordinatenfunktionen z_1, z_2 erzeugt, und man hat eine exakte Sequenz $\mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{I} \longrightarrow 0$ mit $\varphi(1) := (z_2, -z_1)^\top$ und $\psi(\mathbf{e}_\lambda) := z_\lambda$. Dann ist $L(\mathcal{I}) = \{(z_1, z_2), (w_1, w_2)\} \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 : z_2 w_1 - z_1 w_2 = 0\}$. Die Faser über dem Nullpunkt ist der $\mathbb{C}^2$. Über einem Punkt $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \neq (0, 0)$ liegt dagegen der 1-dimensionale Raum $L_{\mathbf{z}}(\mathcal{I}) = \{(w, (z_2/z_1)w) : w \in \mathbb{C}\}$.

Definition: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{F}$ eine Garbe von (abelschen) Gruppen über X und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Eine q -dimensionale *Cokette* ξ über $\mathcal{U}$ mit Werten in $\mathcal{F}$ ist ein System von Schnitten $\xi(i_0, \dots, i_q) \in \Gamma(U_{i_0 \dots i_q}, \mathcal{F})$, das alternierend in den Indizes ist.¹ Die Gruppe aller q -Coketten bezeichnet man mit $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

¹ $U_{i_0 \dots i_q} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}$.

Der Homomorphismus $\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ mit

$$(\delta\xi)(i_0, \dots, i_{q+1}) := \sum_{\lambda=0}^{q+1} (-1)^{\lambda+1} \xi(i_0, \dots, \widehat{i_\lambda}, \dots, i_{q+1})|_{U_{i_0 \dots i_{q+1}}}$$

heißt *Corandoperator*. Im Falle $q = 1$ ist z.B. $(\delta\xi)(i_0 i_1 i_2) = -\xi(i_1 i_2) + \xi(i_0 i_2) - \xi(i_0 i_1)$ (eingeschränkt auf $U_{i_0 i_1 i_2}$), und allgemein $\delta \circ \delta = 0$.

Die Elemente von $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \{\xi \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \delta\xi = 0\}$ nennt man *Cozyklen*, die Elemente von $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \{\xi \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \exists \eta \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \text{ mit } \delta\eta = \xi\}$ *Coränder*. Es ist speziell $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \{(\xi_i) : \xi_i|_{U_{ij}} = \xi_j|_{U_{ij}}\} \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$, und man setzt $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := 0$.

Offensichtlich ist $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, und man nennt $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})/B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ die q -te *Cohomologiegruppe* von $\mathcal{F}$ über $\mathcal{U}$. Offensichtlich ist $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Gehört X selbst zur Überdeckung, so ist $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ für $q \geq 1$. Geht man von einer Überdeckung $\mathcal{U}$ zu einer Verfeinerung $\mathcal{V}$ über, so erhält man für jedes $q \geq 1$ einen Homomorphismus $\tau_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}^q : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, der im Falle $q = 1$ sogar injektiv ist.

Definition: Eine komplexe Mannigfaltigkeit X heißt *holomorph ausbreitbar*, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ endlich viele holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_r$ auf X gibt, so dass x_0 isoliert in $N(f_1, \dots, f_r)$ liegt. X heißt *holomorph konvex*, falls es zu jeder unendlichen diskreten Teilmenge $D \subset X$ eine holomorphe Funktion f auf X mit $\sup_D |f| = +\infty$ ist. X heißt *Steinsch*, falls X holomorph ausbreitbar und holomorph konvex ist.

Die Lösung des Leviproblems auf Mannigfaltigkeiten ergibt: *X ist genau dann Steinsch, wenn X 1-vollständig ist (wenn es also eine streng plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion auf X gibt).* Jedes Holomorphiegebiet im $\mathbb{C}^n$ ist Steinsch.

Eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X heißt Steinsch, falls jedes Überdeckungselement U_i und alle Durchschnitte $U_{i_0 \dots i_q}$ Steinsch ist. Man überlegt sich leicht, dass es immer Steinsche Überdeckungen gibt.

Sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ Steinsche Überdeckungen und ist $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$, so besagt der **Satz von Leray**, dass die Homomorphismen $\tau_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}^q$ Isomorphismen sind. In diesem Falle schreibt man $H^q(X, \mathcal{F}) := H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Satz: Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X .

1. **(Theorem A):** Zu jedem Punkt $x_0 \in X$ gibt es endlich viele Schnitte $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, die $\mathcal{F}_{x_0}$ als $\mathcal{O}_{x_0}$ -Modul erzeugen.
2. **(Theorem B):** Es ist $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $q \geq 1$.

Es gilt noch mehr: Ist $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ für jede kohärente analytische Garbe $\mathcal{F}$ über X und alle $q \geq 1$, so ist X Steinsch. Dabei reicht es sogar, das Verschwinden von $H^1(X, \mathcal{I})$ für jede kohärente Idealgarbe zu fordern.

Zum Schluss soll noch das folgende wichtige Ergebnis erwähnt werden:

Satz von der Cohomologiesequenz: Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine (kurze) exakte Sequenz von kohärenten analytischen Garben auf X . Dann ist auch die folgende (lange) Cohomologiesequenz exakt:

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

$$\dots H^{q-1}(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\partial} H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Die Homomorphismen zwischen Cohomologiegruppen gleicher Dimension werden auf natürliche Weise von den Garbenhomomorphismen induziert. Die „Verbindungshomomorphismen“ $\partial : H^{q-1}(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{F})$ findet man durch Diagrammjagd bei den Cohomologiegruppen zu (Steinschen) Überdeckungen.

Der Endlichkeitssatz von Andreotti/Grauert (Fritzsche, 05.06.)

Literatur: (C-1), (A-3), (B-3), (B-7), (C-3), (C-7)

Definition: Ein Fréchetraum ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit einer Folge von Halbnormen (p_i) , so dass gilt:

1. Zu jedem $f \neq 0$ in E gibt es ein i mit $p_i(f) > 0$.
2. Jede Cauchyfolge in E konvergiert.

Ein Fréchetraum ist ein vollständiger Hausdorff'scher lokal-konvexer topologischer Vektorraum. Er ist genau dann endlich-dimensional, wenn er eine kompakte Nullumgebung enthält.

Ein Beispiel ist der Raum $E := \mathcal{O}(X)$, mit den Halbnormen $p_i(f) := \sup_{K_i} |f|$, wobei (K_i) eine kompakte Ausschöpfung von X ist.

Definition: Eine stetige lineare Abbildung $f : E \rightarrow F$ zwischen Frécheträumen heißt *kompakt*, falls es eine Umgebung $U = U(0) \subset E$ gibt, so dass $f(U)$ relativ-kompakt in F liegt.

Beispiel: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $B \subset\subset X$ offen. Dann ist die Einschränkungabbildung $r : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(B)$ mit $r(f) := f|_B$ kompakt.

Satz von Laurent Schwartz: Gegeben seien zwei stetige lineare Abbildungen $u, v : E \rightarrow F$ zwischen Frécheträumen. Ist u kompakt und v surjektiv, so ist $(u + v)(E)$ ein abgeschlossener Unterraum von F und $\dim_{\mathbb{C}} F/(u + v)(E) < \infty$.

Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X . Außerdem seien $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ und $\widehat{\mathcal{U}} = (\widehat{U}_i)_{i \in I}$ zwei endliche Steinsche Überdeckungen von X mit $U_i \subset\subset \widehat{U}_i$. Dann sind die Räume $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ und $Z^1(\widehat{\mathcal{U}}, \mathcal{F})$ Frécheträume. Man hat lineare Abbildungen $u, v : Z^1(\widehat{\mathcal{U}}, \mathcal{F}) \oplus C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ mit $u(\xi, \eta) := -\xi|_{\mathcal{U}}$ und $v(\xi, \eta) := \xi|_{\mathcal{U}} + \delta\eta$. Dann ist u kompakt und v surjektiv. Außerdem ist $u + v = \delta : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Mit dem Satz von Schwartz folgt nun, dass $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{F}) < \infty$ ist.

Theorem (Andreotti/Grauert): Sei X eine q -konvexe komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X . Dann ist $\dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{F}) < \infty$ für $i \geq q$. Ist X sogar q -vollständig, so ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für $i \geq q$.

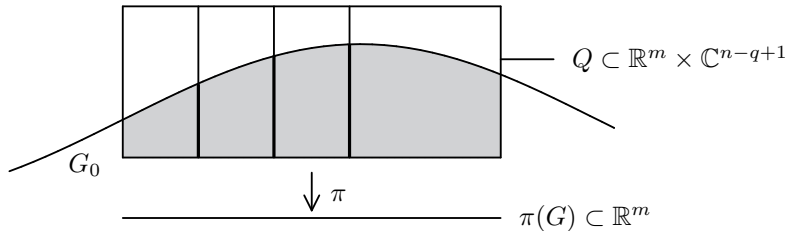
Im Falle $q = 1$ erhält man wieder Theorem B.

Es folgen einige Bemerkungen zum BEWEIS des Satzes.

Zunächst wird die lokale Situation betrachtet. Sei $G \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $\pi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ die kanonische Projektion. Es sei stets $G_t := \pi^{-1}(t)$ leer oder ein Holomorphiegebiet. Man spricht von einer *regulären Familie von Holomorphiegebieten*, falls es ein Holomorphiegebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ gibt, so dass gilt:

1. $\pi^{-1}\pi(G) \subset \pi(G) \times D$.
2. Für alle $t \in \pi(G)$ ist (G_t, D) ein Runge'sches Paar² mit $G_t \subset\subset D$.

Ist nun $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, φ eine q -konvexe Funktion auf G , $\mathbf{z}_0 \in G$ und $G_0 := \{\mathbf{z} \in G : \varphi(\mathbf{z}) < \varphi(\mathbf{z}_0)\} \subset\subset G$. Nach Anwendung einer Drehung kann man Polyzylinder $Q = Q(\mathbf{z}_0) \subset P \subset G$ finden, so dass $\pi : Q \cap G_0 \rightarrow \mathbb{R}^{2(q-1)}$ mit $\pi(z_1, \dots, z_n) := (z_1, \dots, z_{q-1})$ eine reguläre Familie von Holomorphiegebieten ergibt.



² $G' \subset G$ heißt ein Runge'sches Paar, falls das Bild der Restriktionsabbildung $\mathcal{O}(G) \rightarrow \mathcal{O}(G')$ dicht ist.

Indem man Dolbeault-Theorie mit Parametern betreibt und das Verschwinden von Cohomologiegruppen auf Holomorphiegebieten ausnutzt, erhält man unter den obigen Bedingungen:

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $B \subset\subset X$ ein Gebiet mit q -konvexem Rand, $x_0 \in \partial B$ und $U = U(x_0) \subset X$ eine offene Umgebung und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine q -konvexe Funktion mit $U \cap B = \{x \in U : \varphi(x) < 0\}$. Dann gibt es beliebig kleine Steinsche Umgebungen $Q = Q(x_0) \subset U$, so dass $H^j(B \cap Q, \mathcal{F}) = 0$ für $j \geq q$ ist und die Elemente aus $Z^{q-1}(B \cap Q, \mathcal{F})$ beliebig gut durch Elemente aus $Z^{q-1}(Q, \mathcal{F})$ approximiert werden können.

Sei nun X q -konvex (vermöge einer Ausschöpfung φ), $B_c := \{x \in X : \varphi(x) < c\}$. Mit Hilfe von sogenannten „Mayer-Vietoris-Sequenzen“, den lokalen Aussagen und der Grauert’schen Beulenmethode zeigt man: *Zu jedem $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $H^j(X_{c+\varepsilon}, \mathcal{F}) \rightarrow H^j(X_c, \mathcal{F})$ für $j \geq q$ surjektiv ist.*

Mit Hilfe des Satzes von L. Schwartz zeigt man weiter, dass $\dim_{\mathbb{C}} H^j(B_c, \mathcal{F}) < \infty$ für $j \geq q$ gilt. Und schließlich beweist man, dass die Einschränkungabbildung $H^j(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^j(B_c, \mathcal{F})$ für $j \geq q$ surjektiv ist (weil X die Vereinigung aller B_c ist).

Mit Dichtheitsaussagen, etwas Funktionalanalysis und verfeinerten Techniken erhält man, dass die als surjektiv erkannten Abbildungen sogar Isomorphismen sind. Das ergibt die Endlichkeit der Cohomologie. Ist X sogar q -vollständig, so kann man mit $B_c = \emptyset$ beginnen und erhält sogar das Verschwinden der Cohomologie.

Definition: Eine komplexe Mannigfaltigkeit X heißt *cohomologisch q -vollständig*, falls $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für jede kohärente analytische Garbe $\mathcal{F}$ auf X und jedes $i \geq q$ ist. Unter der *cohomologischen Dimension* $\text{cd}(X)$ versteht man die größte natürliche Zahl q , so dass eine kohärente analytische Garbe $\mathcal{F}$ auf X mit $H^q(X, \mathcal{F}) \neq 0$ existiert.

Genau dann ist $\text{cd}(X) = 0$, wenn X Steinsch ist. Und man kann zeigen, dass $\text{cd}(X) \leq n - 1$ für jede nicht-kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit X gilt. Aus dem Satz von Andreotti-Grauert folgt: Ist X q -vollständig, so ist X auch cohomologisch vollständig (und deshalb $\text{cd}(X) \leq q - 1$).

Offenes Problem: Gilt die Umkehrung ($\text{cd}(X) \leq q - 1 \implies X$ q -vollständig)??

1970 untersuchte W. Barth die Komplemente von Untermannigfaltigkeiten Y im komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}^n$. Er zeigte, dass $f(x) := -\text{dist}^2(x, Y)$ eine Ausschöpfungsfunktion auf $\mathbb{P}^n \setminus Y$ ist, deren Levi-form auf $H_x(f)$ immer $n - q$ positive Eigenwerte (mit $q := \text{codim}(Y, X)$) besitzt, zumindest dort, wo f differenzierbar ist. Also ist $\mathbb{P}^n \setminus Y$ q -konvex und $\dim_{\mathbb{C}} H^j(\mathbb{P}^n \setminus Y, \mathcal{F}) < \infty$ für $j \geq q$. Zugleich kann man an Beispielen sehen, dass die Cohomologie nicht unbedingt für $j \geq q$ verschwindet.

Offenes Problem: Was ist der (geometrische oder analytische) Grund dafür, dass eine Mannigfaltigkeit q -konvex, aber nicht q -vollständig ist.

Komplemente von Untermannigfaltigkeiten im projektiven Raum sind das analytische Äquivalent zum Begriff der quasiprojektiven Varietät in der Algebraischen Geometrie. Nimmt man eine Hyperfläche heraus, so bekommt man eine Steinsche Mannigfaltigkeit, die durch das Verschwinden der Cohomologie charakterisiert werden kann. In der Algebraischen Geometrie entspricht dem eine affine Varietät, die ebenfalls durch das Verschwinden der entsprechenden (algebraischen) Cohomologie charakterisiert wird.

Offenes Problem: Gibt es ein algebraisches Äquivalent zur q -konvexen oder q -vollständigen Mannigfaltigkeit. Zumindest bei der q -Vollständigkeit würde sich ein Cohomologie-Kriterium anbieten (das aber leider im analytischen Fall nicht zur Verfügung steht). Da die Cohomologiegruppen in der Algebraischen Geometrie automatisch endlich-dimensional sind, hat man bei der q -Konvexität schlechte Karten. Die folgenden Vorträge werden aber Denkanstöße geben.

Holomorphe Vektorbündel (Rottmann, 29.05.)

Literatur: (A-3), (A-5), (B-8). Vektoren werden als Spaltenvektoren aufgefasst!

Definition: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Ein *komplexes Vektorbündel* vom Rang q über X ist gegeben durch eine komplexe Mannigfaltigkeit E und eine holomorphe Abbildung $\pi : E \rightarrow X$, zusammen mit einer offenen Überdeckung (U_i) von X und biholomorphen Abbildungen $\varphi_i : E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^q$ (sogenannten *lokalen Trivialisierungen* oder *Vektorbündelkarten*) mit $\text{pr}_2 \circ \varphi_i = \pi$, so dass gilt: Zu jedem Paar (i, k) gibt es eine holomorphe Abbildung $g_{ik} : U_i \cap U_k \rightarrow \text{GL}_q(\mathbb{C})$ (eine sogenannte *Übergangsfunktion*) mit

$$\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}(x, \mathbf{v}) = (x, g_{ik}(x) \cdot \mathbf{v}).$$

Es ist dann $g_{ik}(x) \cdot g_{kl}(x) = g_{il}(x)$ für alle $x \in U_i \cap U_k \cap U_l$, und $g_{ik}(x)^{-1} = g_{ki}(x)$.

Ist $q = 1$, so spricht man auch von einem *Geradenbündel*. Die Übergangsfunktionen sind dann nirgends verschwindende holomorphe Funktionen.

Mit Hilfe der Übergangsfunktionen kann man lokale Modelle $U_i \times \mathbb{C}^q$ zu einem Vektorbündel zusammenkleben. Deshalb kann man die Konstruktion neuer Bündel aus bereits vorhandenen gut mit Hilfe der Übergangsfunktionen beschreiben. Die Bündel sind dann jeweils nur bis auf Isomorphie festgelegt. Speziell ist $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ die Menge aller Isomorphieklassen von komplexen Geradenbündeln auf X .

1. *Direkte Summe* $E_1 \oplus E_2 = \{(v, w) \in E_1 \times E_2 : \pi_1(v) = \pi_2(w)\}$ mit $G_{ik} := \begin{pmatrix} g_{ik}^{(1)} & 0 \\ 0 & g_{ik}^{(2)} \end{pmatrix}$.
2. *Duales Bündel* $E^* = \bigcup_{x \in X} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_x, \mathbb{C})$ mit $g_{ik}^* := g_{ki}^{\top}$

Es werden Vektorbündel-Homomorphismen und -Isomorphismen definiert.

Definition: Sei $\pi : E \rightarrow X$ ein komplexes Vektorbündel, $U \subset X$ offen. Ein *holomorpher Schnitt* über U in E ist eine holomorphe Abbildung $s : U \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}_U$. Die Menge aller solcher Schnitte bildet den Vektorraum $\Gamma(U, E)$.

Jeder Schnitt $s \in \Gamma(U, E)$ bestimmt ein System von Funktionen $s_i : U_i \cap U \rightarrow \mathbb{C}^q$ mit $\varphi_i \circ s(x) = (x, s_i(x))$. Es gilt die Übergangsbedingung $s_i(x) = g_{ik}(x) \cdot s_k(x)$ über $U_i \cap U_k \cap U$.

Man kann die Garbe $\mathcal{O}(E)$ der Keime von holomorphen Schnitten in E bilden. Sie ist lokal-frei, also eine kohärente analytische Garbe.

Definition: Sei $\pi : E \rightarrow X$ ein Vektorbündel vom Rang q . Eine Teilmenge $F \subset E$ heißt *Unterbündel* (vom Rang p), falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U = U(x)$, einen p -dimensionalen Untervektorraum $V \subset \mathbb{C}^q$, und eine Trivialisierung $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^q$ gibt, so dass $\varphi^{-1}(U \times V) = F \cap \pi^{-1}(U)$ ist.

Man kann dann auch das *Quotientenbündel* E/F bilden, mit $(E/F)_x = E_x/F_x$. Beweis!

Ist $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung und $\pi : E \rightarrow Y$ ein komplexes Vektorbündel, so kann man das zurückgeliftete Bündel f^*E auf X bilden („Pullback“):

$$f^*E := \{(x, v) \in X \times E : f(x) = \pi(v)\}.$$

Es sollen auch dazu Übergangsfunktionen gefunden werden.

Beispiele:

1. *Triviales Bündel*: $X \times \mathbb{C}$
2. *Tangentialbündel* $T(X)$ (Details siehe (A-3), Example auf Seite 176). Die globalen Schnitte in $T(X)$ sind die holomorphen Vektorfelder auf X .
3. *Kanonisches Bündel*: K_X (Details siehe (A-3), Example auf Seite 173/174). Die globalen Schnitte im kanonischen Bündel sind die globalen holomorphen n -Formen auf X .
4. Das *tautologische Bündel* (oder „Hopf-Bündel“) auf dem $\mathbb{P}^n$:

$$\mathcal{O}(-1) := \{([z], \mathbf{w}) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : \mathbf{w} \in \mathbb{C}z\},$$

wobei $[\mathbf{z}] = (z_0 : \dots : z_n)$ das Bild von $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n)$ unter der kanonischen Projektion

$$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{P}^n$$

bezeichnet. Man beachte, dass hier die Bezeichnung nicht zwischen dem Bündel und der zugeordneten Garbe der holomorphen Schnitte unterscheidet. Lokale Trivialisierungen gewinnt man so:

Sei $U_i := \{(z_0 : \dots : z_n) : z_i \neq 0\}$ und $\varphi_i : \mathcal{O}(-1)|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi_i(x, \mathbf{w}) := (x, w_i)$. Dann ist

$$\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}([\mathbf{z}], c) = \varphi_i\left([\mathbf{z}], \frac{c}{z_k} \cdot \mathbf{z}\right) = \left([\mathbf{z}], \frac{z_i}{z_k} c\right),$$

also $g_{ik} = z_i/z_k$.

$\mathcal{O}(-1)$ ist ein Unterbündel des trivialen Bündels $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Deshalb besitzt $\mathcal{O}(-1)$ außer dem Nullschnitt keine weiteren globalen holomorphen Schnitte.

Satz: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $\pi : E \rightarrow X$ ein komplexes Vektorbündel. Dann ist $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, E) < \infty$.

Beweis: (A-2) Field 2, Theorem 5.9.1.

Normalenbündel, Divisoren und assoziierte Geradenbündel (Harz, 05.06.)

Literatur: (A-3), (A-5) und (A-7).

Satz: *ei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist $T(Y)$ ein Unterbündel von $T(X)|_Y := i^*T(X)$ (wobei $i : Y \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung bezeichnet).*

Bezeichnungen: siehe voriger Vortrag, Beweis: siehe (A-3), Example auf Seite 181.

Definition: Das Quotientenbündel $N_X(Y) := i^*T(X)/T(Y)$ nennt man das *Normalenbündel* von Y in X .

Unter einem *Divisor* wird hier immer eine zusammenhängende 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit verstanden, also eine glatte Hyperfläche.

Sei $Y \subset X$ ein Divisor. Es gibt eine offene Überdeckung (U_i) von X und holomorphe Funktionen f_i auf U_i , so dass $Y \cap U_i = \{x \in U_i : f_i(x) = 0\}$ ist. Man kann $f_i = 1$ setzen, wenn $U_i \cap Y = \emptyset$ ist. Durch $g_{ik} := f_i/f_k$ werden nirgends verschwindende holomorphe Funktionen auf $U_i \cap U_k$ definiert, die als Übergangsfunktionen eines Geradenbündels aufgefasst werden können, das man mit $[Y]$ bezeichnet. Wie immer ist es nur bis auf Isomorphie bestimmt. Man nennt $[Y]$ *das zum Divisor Y assoziierte Bündel*. Die holomorphen Funktionen f_i definieren einen globalen Schnitt s_Y in $[Y]$, der genau auf Y verschwindet. Konsequenz: $[Y]$ ist über $X \setminus Y$ trivial.

Details siehe (A-3), Seite 200, und auch (A-7).

Satz (Erste Adjunktionsformel): *Unter den obigen Voraussetzungen ist $[Y]|_Y = N_X(Y)$.*

Beweis siehe (A-3), Seite 215, sowie (A-5), Proposition 2.4.7.

Tensorprodukt von Vektorbündeln (siehe (A-3), Seite 179, und (A-5).

Satz (Zweite Adjunktionsformel): *Unter den obigen Voraussetzungen ist $K_Y = i^*K_X \otimes N_X(Y)$.*

Beweis siehe (A-3), Seite 215, sowie (A-5), Proposition 2.2.17

Beispiel: Ist $H \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperebene, so nennt man $\mathcal{O}(1) := [H]$ das *Hyperebenenschnittbündel*. Dabei ist es egal, von welcher Hyperebene man ausgeht. Nimmt man etwa $H = \{z_0 = 0\}$, so ist $H \cap U_i = \{(z_0 : \dots : z_n) : z_0/z_i = 0\}$. Als Übergangsfunktionen für $\mathcal{O}(1)$ erhält man also $g_{ik} = (z_0/z_i)/(z_0/z_k) = z_k/z_i$. Das zeigt, dass $\mathcal{O}(1)$ das duale Bündel zu $\mathcal{O}(-1)$ ist.

Die q -te Tensorpotenz $\mathcal{O}(q) := \mathcal{O}(1)^{\otimes q}$ wird durch die Übergangsfunktionen $(z_k/z_i)^q$ bestimmt (siehe (A-3), Seite 178/179).

Jedes homogene Polynom F vom Grad q (in den Veränderlichen $z_0, \dots, z_n$) induziert einen globalen Schnitt $s_F \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(q))$, durch

$$(s_F)_i(z_0 : \dots : z_n) := z_i^{-q} F(z_0, \dots, z_n) \quad \text{auf } U_i.$$

Details dazu siehe (A-3), Seite 221. Man kann die Aussage auch umdrehen und erhält:

Satz: *Für $q \in \mathbb{N}$ ist $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(q))$ isomorph zum Raum der homogenen Polynome vom Grad q in den Variablen $z_0, \dots, z_n$.*

Euler-Sequenz und projektive Bündel (Sera, 12.06.)

Literatur: (A-3), (A-5), (A-9)

Für das Hyperebenenchnittbündel $\mathcal{O}(1)$ (vgl. voriger Vortrag) gibt es eine alternative Beschreibung:

Sei $p_0 := (0 : \dots : 0 : 1) \in \mathbb{P}^{n+1}$ und die Projektion $\pi_0 : \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ definiert durch

$$\pi_0(z_0 : \dots : z_n : z_{n+1}) := (z_0 : \dots : z_n).$$

Das ist in Wirklichkeit ein Faserbündel und isomorph zu $\mathcal{O}(1)$.

Sei $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Durch

$$\varphi_{\mathbf{z}}[f] := \frac{d}{dt} \Big|_0 (f \circ \pi(\mathbf{z} + t\mathbf{w}))$$

wird eine surjektive lineare Abbildung $\varphi_{\mathbf{z}} : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow T_{\pi(\mathbf{z})}(\mathbb{P}^n)$ definiert, mit $\text{Ker}(\varphi_{\mathbf{z}}) = \mathbb{C}\mathbf{z}$. Dies benutzt man, um folgende exakte Sequenz einzuführen:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T(\mathbb{P}^n) \longrightarrow 0.$$

Details siehe (A-3), Seite 222, sowie (A-5), Seite 91 - 93.

Ist $\pi : E \rightarrow X$ ein Vektorbündel vom Rang q , so bezeichnet man

$$\mathbb{P}(E) := \bigcup_{x \in X} \mathbb{P}(E_x), \quad \text{mit } \mathbb{P}(E_x) := (E_x \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*,$$

als das zugehörige *projektive Bündel*.

Mit Hilfe der lokalen Trivialisierungen φ_i von E erhält man lokale Trivialisierungen

$$\tilde{\varphi}_i : \mathbb{P}(E)|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{P}^{q-1},$$

und die kann man zu dem globalen Bündel $\mathbb{P}(E)$ zusammenkleben.

Über jeder Faser des projektiven Bündels hat man ein tautologisches Bündel. Alle diese Bündel zusammen ergeben ein Geradenbündel $L(E) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$ über $\mathbb{P}(E)$.

Literatur dazu: (A-9), (A-5), leider etwas dünn. Man muss wohl selber rechnen.

$L(E)$ ist Unterbündel von $\mathbb{P}(E)_X E := \{(p, v) \in \mathbb{P}(E) \times E : \tilde{\pi}(p) = \pi(v)\}$. Die Inklusion induziert eine biholomorphe Abbildung

$$\Phi : L(E) \setminus \mathbb{P}(E) \rightarrow E \setminus Z_E,$$

wenn man den Nullschnitt (oder genauer das Bild des Nullschnittes in E) mit Z_E bezeichnet.

Fasermetriken und positive Bündel (Roitzsch, 19.06.)

Literatur: (A-4)

Definition: Sei $\pi : E \rightarrow X$ ein komplexes Vektorbündel. Ein *Fasermetrik* auf E ist eine differenzierbare Abbildung $h : E \oplus E \rightarrow \mathbb{C}$, die auf jeder Faser E_x ein hermitesches Skalarprodukt induziert. Man nennt E dann ein *hermitesches Vektorbündel*.

Lokale Beschreibung: Ist $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^q$ eine lokale Trivialisierung, so gibt es eine differenzierbare Abbildung $H_\varphi : U \rightarrow \text{GL}_q(\mathbb{C})$, so dass für alle $x \in U$ gilt:

1. $H_\varphi(x)^\top = \overline{H_\varphi(x)}$.
2. $h_x(\varphi_x^{-1}(\mathbf{v}), \varphi_x^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{v}^\top \cdot H_\varphi(x) \cdot \overline{\mathbf{w}}$.

Ist eine Überdeckung von X durch Trivialisierungen $\varphi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^q$ gegeben (mit Übergangsfunktionen $g_{ik} : U_i \cap U_k \rightarrow \text{GL}_q(\mathbb{C})$) und h durch ein System von Matrix-Funktionen H_i , so gilt über $U_i \cap U_k$:

$$H_k(x) = g_{ik}(x)^\top \cdot H_i(x) \cdot \overline{g_{ik}(x)}.$$

Satz: Ist $\pi : E \rightarrow X$ ein beliebiges komplexes Vektorbündel, so gibt es auf E eine Fasermetrik.

Beweis: Benutze Überdeckung durch Trivialisierungen und dazu eine Teilung der Eins (e_i). Das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^q$ induziert Fasermetriken h_i auf $E|_{U_i}$. Dann ist $h := \sum_i e_i h_i$ eine Fasermetrik auf E .

Beispiel: Berühmt ist die *Fubini-Study-Metrik* auf dem $\mathbb{P}^n$. Die kann man als Fasermetrik auf dem $T(\mathbb{P}^n)$ einführen. Sei $U_i = \{[\mathbf{z}] \in \mathbb{P}^n : z_i \neq 0\}$, $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ die Karte, die durch

$$\varphi_i(z_0 : \dots : z_n) := \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

gegeben wird. Wir schreiben $t_{i\nu} := z_\nu / z_i$ für die lokalen Koordinaten. Sei $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_i(z_0 : \dots : z_n) := \ln \left(\sum_{\nu=0}^n |t_{i\nu}|^2 \right).$$

Dann kann man $h_i : T(\mathbb{P}^n)|_{U_i} \oplus T(\mathbb{P}^n)|_{U_i} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren durch

$$h_i([\mathbf{z}], v, w) := \text{Lev}_{[\mathbf{z}]}(f_i)(v, w).$$

Man rechnet leicht nach, dass so eine globale Fasermetrik eingeführt wird.

Sind auf Bündeln E , E_1 , E_2 Fasermetriken h , h_1 , h_2 gegeben, die durch Matrixensysteme (H_i) , $(H_i^{(1)})$ und $(H_i^{(2)})$ beschrieben werden, so erhält man

1. Eine Fasermetrik auf $E_1 \oplus E_2$, mit Matrizen $\begin{pmatrix} H_i^{(1)} & 0 \\ 0 & H_i^{(2)} \end{pmatrix}$,
2. eine Fasermetrik auf E^* , mit Matrizen $(H_i^\top)^{-1}$.

Definition: Sei $\pi : E \rightarrow X$ ein Vektorbündel, h eine Fasermetrik auf E und $x_0 \in X$. Eine Trivialisierung $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^q$ (mit $x_0 \in U$) heißt *normal* in x_0 bezüglich h , falls h bezüglich der Trivialisierung φ durch eine Matrixfunktion $H_\varphi : U \rightarrow \text{GL}_q(\mathbb{C})$ beschrieben wird, so dass gilt:

$$H_\varphi(x_0) = E_q \text{ (Einheitsmatrix)} \quad \text{und} \quad (\partial H_\varphi)_{x_0} = 0.$$

Tatsächlich kann man diese Situation immer herstellen:

Ausgangspunkt ist eine beliebige Trivialisierung φ_0 über U . Sei H_0 die hermitesche Matrixfunktion, die h bezüglich φ_0 beschreibt. Weil $H_0(x_0)$ eine positiv definite hermitesche Matrix ist, gibt es eine Matrix $A \in \text{GL}_q(\mathbb{C})$ mit $A^\top \cdot H_0(x_0) \cdot \overline{A} = E_q$. Sei $F_A : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}^q$ die lineare Abbildung mit $F_A(\mathbf{z}) := A \cdot \mathbf{z}$.

Setzt man $\varphi := (\text{id}_U \times F_A^{-1}) \circ \varphi_0$, so gilt für die Matrix H , die h bezüglich φ beschreibt, die Gleichung $H(x_0) = A^\top \cdot H_0(x_0) \cdot \bar{A} = E_q$. Als nächstes wird $R : U \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{C})$ definiert durch

$$R_{ik}(x) := \delta_{ik} - \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial H_{ki}}{\partial z_\nu}(0) z_\nu,$$

wobei $z_1, \dots, z_n$ lokale Koordinaten auf U mit $z_\nu(x_0) = 0$ für $\nu = 1, \dots, n$ sind. Dann ist $R(x_0) = E_q$ (und o.B.d.A. $R(x) \in \text{GL}_q(\mathbb{C})$ für $x \in U$). Jetzt definiere man die Trivialisierung ψ durch $\psi := \Phi \circ \varphi$, mit $\Phi(x, \mathbf{v}) := (x, R(x)^{-1} \cdot \mathbf{v})$. Die hermitesche Matrix $\tilde{H}$ beschreibe h bezüglich ψ . Dann ist $\tilde{H}(x) = R(x)^\top \cdot H(x) \cdot \overline{R(x)}$, also $\tilde{H}(x_0) = E_q$. Und man rechnet leicht nach, dass $\frac{\partial \tilde{H}_{ik}}{\partial z_\lambda}(0) = 0$ für alle i, k, λ ist.

Definition: Sei $\pi : E \rightarrow X$ ein Vektorbündel, $Z_E \subset E$ der Nullschnitt. E heißt *negativ*, falls es auf E eine Fasermetric h gibt, so dass χ_h (mit $\chi_h(v) := h(v, v)$) auf $E \setminus Z_E$ 1-konvex ist. Das Bündel heißt *positiv*, falls E^* negativ ist.

Sei $x_0 \in X$ und φ eine Trivialisierung, die in x_0 normal bezüglich h ist. Ist $v \in E_{x_0}$, so kann man E_{x_0} als Untervektorraum von $T_v(E)$ auffassen. Die biholomorphe Abbildung $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^q$ induziert einen Isomorphismus $T_v \varphi : T_v(E) \rightarrow T_{\varphi(v)}(U \times \mathbb{C}^q) = T_{x_0}(X) \oplus \mathbb{C}^q$, der E_{x_0} auf $\{0\} \times \mathbb{C}^q$ abbildet. Es sei $B_v^{(\varphi)}$ das Urbild von $T_{x_0}(X) \times \{0\}$ unter $T_v \varphi$.

Satz: E ist genau dann positiv, wenn es eine Fasermetric h auf E gibt, so dass für jeden Punkt $x_0 \in X$ und jede in x_0 bezüglich h normale Trivialisierung $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^q$ gilt:

Für $v \in E_{x_0} \setminus \{0\}$ ist $\text{Lev}_v(\chi_h)$ auf $B_v^{(\varphi)}$ negativ definit.

BEWEIS: Sei h^* eine Fasermetric auf E^* , so dass χ_{h^*} auf $E^* \setminus Z_{E^*}$ 1-konvex ist. Sei $x_0 \in X$ und $\varphi^* : E^*|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^q$ eine Trivialisierung mit $x_0 \in U$, sowie H^* die Matrix, die h^* bezüglich φ^* beschreibt, und $H := (H^*)^\top$. Es sei φ^* dual zu einer in x_0 normalen Trivialisierung φ von E . Dann beschreibt H die Fasermetric h bezüglich φ , und φ^* ist ebenfalls in x_0 normal. Man rechnet nach: Ist $v \in E_{x_0}$, $\varphi(v) = (x_0, \mathbf{v})$, $v^* \in E_{x_0}^*$ und $\varphi^*(v^*) = (x_0, \mathbf{w})$, sowie $\eta = (\eta', \eta'') \in T_v(E)$ und $\xi = (\xi', \xi'') \in T_{v^*}(E^*)$, so ist

$$\begin{aligned} \text{Lev}_v(\chi_h)(\xi, \xi) &= \sum_{j=1}^q |\xi_j''|^2 + \sum_{\nu, \mu=1}^n \left(\sum_{i,k=1}^q \frac{\partial^2 H_{ik}}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(0) v_i \bar{v}_k \right) \xi_\nu' \bar{\xi}_\mu' \\ \text{Lev}_{v^*}(\chi_{h^*})(\eta, \eta) &= \sum_{j=1}^q |\eta_j''|^2 - \sum_{\nu, \mu=1}^n \left(\sum_{i,k=1}^q \frac{\partial^2 H_{ik}}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(0) w_i \bar{w}_k \right) \eta_\nu' \bar{\eta}_\mu' \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

$\text{Lev}_v(\chi_h)$ hat in Faserrichtung immer q positive Eigenwerte. Das Bündel heißt positiv, wenn $\text{Lev}_v(\chi_h)$ auf $E \setminus Z_E$ in „horizontaler Richtung“ die maximale Zahl von negativen Eigenwerten (also n) besitzt. Der Grund für die Bezeichnung „positiv“ kann hier nicht erläutert werden.

Beispiel: Das Hyperebenenschnittbündel $\mathcal{O}(1)$ auf dem $\mathbb{P}^n$ wird durch die Übergangsfunktionen $g_{ij} = z_j/z_i$ beschrieben. Auf $U_i = \{(z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n : z_i \neq 0\}$ sei h_i definiert durch

$$h_i(z_0 : \dots : z_n) := \frac{|z_i|^2}{\sum_{j=0}^n |z_j|^2} = \left(\sum_{j \neq i} |t_j|^2 + 1 \right)^{-1},$$

für $t_j := z_j/z_i$. Dann ist $h_i|g_{ij}|^2 = h_j$, also wird durch das System der h_i eine Fasermetric auf $\mathcal{O}(1)$ definiert.

Sei $x_0 \in U_i$. Mit Hilfe einer orthogonalen Koordinatentransformation kann man erreichen, dass $x_0 = (0 : \dots : 1 : \dots : 0)$ ist. Dann ist $h_i(x_0) = 1$, und die Ableitungen

$$\frac{\partial h_i}{\partial t_k}(x_0) = -\bar{t}_k \cdot \left(\sum_{j \neq i} |t_j|^2 + 1 \right)^{-1}$$

verschwinden im Punkt x_0 . Also ist die Trivialisierung $\varphi_i : \mathcal{O}(1)|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ in x_0 normal bezüglich der konstruierten Fasermetric h . Man rechnet nun leicht nach, dass

$$\frac{\partial^2 h_i}{\partial t_\nu \partial \bar{t}_\mu}(x_0) = -\delta_{\nu\mu}$$

ist. Also hat $\text{Lev}_{(x_0, v)}(\chi_h)$ für jedes $v \neq 0$ die maximale Anzahl negativer Eigenwerte. Das bedeutet, dass $\mathcal{O}(1)$ positiv ist.

Definition: Das Bündel E heißt *r-positiv*, wenn $\text{Lev}_v(\chi_h)$ für jedes $v \in E \setminus Z_E$ in horizontaler Richtung höchstens $r - 1$ Eigenwerte ≥ 0 (also mindestens $n - r + 1$ Eigenwerte < 0) besitzt, wenn also für jedes $v \neq 0$ die hermitesche $(n \times n)$ -Matrix

$$\left(\sum_{i,k=1}^q \frac{\partial^2 H_{ik}}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(0) v_i \bar{v}_k \mid \nu, \mu = 1, \dots, n \right)$$

$n - r + 1$ negative Eigenwerte besitzt.

Bei Schneider heißt ein Bündel *metrisch r-konvex*, wenn es eine Fasermetric h auf E gibt, so dass χ_h auf $E \setminus Z_E$ *r-konvex* ist. Das Bündel heißt *metrisch r-konkav*, falls E^* metrisch *r-konvex* ist. In diesem Falle gibt es auf E^* eine Fasermetric h^* , so dass $\text{Lev}(\chi_{h^*})$ höchstens $r - 1$ Eigenwerte ≤ 0 besitzt. Also stimmt „metrisch *r-konkav*“ mit „*r-positiv*“ überein.

Der Satz von Schneider für Hyperflächen (Roitzsch, 26.06.)

Literatur: (A-8)

Sei $\pi : E \rightarrow X$ ein Geradenbündel und $\varphi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ eine Überdeckung durch Trivialisierungen mit Übergangsfunktionen g_{ij} . Eine Fasermetrik auf E ist gegeben durch ein System (h_i) von Funktionen $h_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $h_j = h_i |g_{ij}|^2$ auf $U_i \cap U_j$. Dann ist

$$\log h_j = \log h_i + \log g_{ij} + \overline{\log g_{ij}},$$

also $\text{Lev}_x(\log h_j) = \text{Lev}_x(\log h_i)$ auf $U_i \cap U_j$.

Es ist

$$\text{Lev}_x(\log h_i)(\xi, \xi) = -\frac{1}{h_i(x)^2} |(\partial h_i)_x(\xi)|^2 + \frac{1}{h_i(x)} \text{Lev}_x(h_i)(\xi, \xi).$$

Liegt also eine in x_0 normale Trivialisierung vor, so ist $\text{Lev}_{x_0}(\log h_i)(\xi, \xi) = \text{Lev}_{x_0}(h_i)(\xi, \xi)$. Das Geradenbündel ist demnach genau dann r -positiv, wenn $\text{Lev}_x(\log h_i)$ für jedes i und jedes $x \in U_i$ mindestens $n - q + 1$ Eigenwerte < 0 hat.

Satz: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine abgeschlossene 1-codimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit. Ist das Normalenbündel von Y in X q -positiv, so ist $X \setminus Y$ eine q -konvexe Mannigfaltigkeit.

Zum BEWEIS: Mit $L := [Y]$ ist $L|_Y = N_X(Y)$. Die Positivität von $N_X(Y)$ liefert eine Fasermetrik g (gegeben durch Funktionen g_i), die man mit einer Teilung der Eins zu einer Fasermetrik h auf L fortsetzen kann. Ist $Y \cap U_i = \{f_i = 0\}$, so ist h durch ein System von Funktionen h_i mit

$$h_j = h_i \frac{|f_i|^2}{|f_j|^2} \quad \text{und} \quad h_i|_{U_i \cap Y} = g_i$$

gegeben. Nach Voraussetzung hat $\text{Lev}_x(\log g_i)$ für $x \in Y \cap U_i$ mindestens $n - q = (n - 1) - q + 1$ negative Eigenwerte. Das gilt dann auch für $\text{Lev}_x(\log h_i)$ in den Punkten $x \in Y \cap U_i$.

Sei $c > 0$ und $\varphi_i := h_i / (1 + c|f_i|^2 h_i)$ auf U_i . Weil $\varphi_i |f_i|^2 = \varphi_j |f_j|^2$ auf $U_i \cap U_j$ ist, wird durch $f|_{U_i} := \varphi_i |f_i|^2$ eine globale differenzierbare $\mathbb{R}_+$ -wertige Funktion f auf X definiert, die auf Y verschwindet.

Sei $x_0 \in Y \cap U_i$ fest gewählt. Man kann lokale Koordinaten $z_1, \dots, z_n$ um x_0 wählen, so dass gilt:

1. $f_i = z_n$,

2. $\text{Lev}_{x_0}(h_i)(\xi, \eta) = \xi^\top \cdot \Lambda \cdot \bar{\eta}$, mit $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-q} < 0$.

Es ist $\varphi_i(1 + c|z_n|^2 h_i) = h_i$, also $\log \circ h_i(z_1, \dots, z_{n-1}, 0) = \log \circ \varphi_i(z_1, \dots, z_{n-1}, 0)$ und

$$\frac{\partial^2(\log \circ \varphi_i)}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(x_0) = \frac{\partial^2(\log \circ h_i)}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu, \mu < n \text{ und } \nu \neq \mu, \\ \lambda_\nu & \text{für } 1 \leq \nu = \mu \leq n-1. \end{cases}$$

Weiter ist $\lambda_n = \frac{\partial^2(\log \circ h_i)}{\partial z_n \partial \bar{z}_n} = \frac{\partial^2(\log \circ \varphi_i)}{\partial z_n \partial \bar{z}_n} + \frac{c \cdot h_i + c|z_n|^2 \partial^2 h_i / (\partial z_n \partial \bar{z}_n)}{1 + c|z_n|^2 h_i}$, also

$$\frac{\partial^2(\log \circ \varphi_i)}{\partial z_n \partial \bar{z}_n}(x_0) = \lambda_n - c \cdot h_i(x_0).$$

Schließlich ist $\frac{\partial^2(\log \circ h_i)}{\partial z_n \partial \bar{z}_n}(z_1, \dots, z_{n-1}, 0) = \frac{\partial^2(\log \circ \varphi_i)}{\partial \bar{z}_n}(z_1, \dots, z_{n-1}, 0)$, also

$$\frac{\partial^2(\log \circ \varphi_i)}{\partial z_n \partial \bar{z}_n}(x_0) = \frac{\partial^2(\log \circ h_i)}{\partial z_n \partial \bar{z}_n}(x_0) = 0 \text{ für } 1 \leq \nu \leq n-1.$$

Wählt man c genügend groß, so hat $\text{Lev}_{x_0}(\log \varphi_i)$ mindestens $n - q + 1$ negative Eigenwerte. Das gilt dann noch in einer kleinen Umgebung, und weil Y kompakt ist, gibt es eine offene Umgebung $V = V(Y) \subset X$, so dass $\text{Lev}_x(\log \varphi_i)$ für $x \in V \cap U_i$ immer $n - q + 1$ negative Eigenwerte hat.

Jetzt sei $\varphi := -\log(f|_{X \setminus Y})$. Das ist eine differenzierbare Ausschöpfungsfunktion für $X \setminus Y$. In der Nähe von Y ist $\text{Lev}_x(\varphi) = -\text{Lev}_x(\log f) = -\text{Lev}_x(\log \varphi_i + \log f_i + \overline{\log f_i}) = -\text{Lev}_x(\log \varphi_i)$. Also ist φ dort q -konvex und $X \setminus Y$ eine q -konvexe Mannigfaltigkeit.

Der σ -Prozess und das Aufblasen von Untermannigfaltigkeiten (Sera, 03.07.)

Literatur: (A-5), (A-3)

Für $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei $\ell(\mathbf{z}) = \mathbb{C}\mathbf{z}$ die Gerade durch $\mathbf{z}$ und den Nullpunkt und $[\mathbf{z}]$ der zugeordnete Punkt im $\mathbb{P}^n$. Betrachte $F := \{([\mathbf{z}], \mathbf{w}) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : \mathbf{w} \in \ell(\mathbf{z})\}$ (man nennt so etwas eine „Inzidenzmannigfaltigkeit“) mit den beiden Projektionen

$$\pi = \text{pr}_1 : F \rightarrow \mathbb{P}^n \quad \text{und} \quad \sigma := \text{pr}_2 : F \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}.$$

Es ist $\pi^{-1}([\mathbf{z}]) = \{[\mathbf{z}]\} \times \ell(\mathbf{z})$, π beschreibt also das tautologische Bündel $\mathcal{O}(-1)$. Dies ist ein Unterbündel des trivialen Bündels $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Über $U_i = \{[\mathbf{z}] \in \mathbb{P}^n : z_i \neq 0\}$ definiere man die Trivialisierung $\psi_i : U_i \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^{n+1}$ durch

$$\psi_i([\mathbf{z}], \mathbf{w}) := ([\mathbf{z}], (u_0([\mathbf{z}], \mathbf{w}), \dots, u_n([\mathbf{z}], \mathbf{w}))),$$

mit

$$u_i([\mathbf{z}], \mathbf{w}) := w_i \quad \text{und} \quad u_\nu([\mathbf{z}], \mathbf{w}) := w_\nu - \frac{w_i}{z_i} z_\nu \quad \text{für } \nu \neq i.$$

Für $[\mathbf{z}] \in U_i$ ist $\{\frac{1}{z_i}\mathbf{z}, \mathbf{e}_0, \dots, \hat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{C}^{n+1}$ und dann

$$\psi_i^{-1}([\mathbf{z}], (u_0, \dots, u_n)) = ([\mathbf{z}], u_i \mathbf{e}_i + \sum_{\nu \neq i} (u_\nu + \frac{u_i}{z_i} z_\nu) \mathbf{e}_\nu),$$

also

$$\begin{aligned} \psi_i^{-1}(\{[\mathbf{z}]\} \times \mathbb{C}\mathbf{e}_i) &= \{([\mathbf{z}], \mathbf{w}) : w_\nu = \frac{w_i}{z_i} z_\nu \text{ für } \nu \neq i\} \\ &= \{([\mathbf{z}], \mathbf{w}) : w_\nu z_i - w_i z_\nu = 0 \text{ für } \nu = 0, \dots, n\} \\ &= \{([\mathbf{z}], \mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \mathbb{C}\mathbf{z}\} = \mathcal{O}(-1)_{[\mathbf{z}]}. \end{aligned}$$

Die *Hopf-Abbildung* $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ hat folgende verblüffende Eigenschaft: Ist $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, so ist $\sigma^{-1}(\mathbf{w}) = \{[\mathbf{w}], \mathbf{w}\}$ eine 1-punktige Menge, während $\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbb{P}^n \times \{\mathbf{0}\} \cong \mathbb{P}^n$ ist. Setzt man $E := \sigma^{-1}(\mathbf{0})$, so ist die Abbildung $\sigma : F \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ biholomorph. Also entsteht F aus dem $\mathbb{C}^{n+1}$, indem man an Stelle des Nullpunktes einen n -dimensionalen projektiven Raum einsetzt. Als Bündelraum eines komplexen Geradenbündels über $\mathbb{P}^n$ ist F wieder eine Mannigfaltigkeit! Man spricht vom σ -Prozess oder sagt, dass der $\mathbb{C}^{n+1}$ im Nullpunkt aufgeblasen wird. Man kann diesen Prozess auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Ist X eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $x_0 \in X$, so verstehen wir unter $B_{x_0}(X)$ die Mannigfaltigkeit, die man gewinnt, wenn man an Stelle von x_0 einen $(n-1)$ -dimensionalen projektiven Raum einsetzt.

Ein kleines Spiel: Sei $x_0 := (0 : \dots : 1)$. Projiziert man $\mathbb{P}^{n+1} \setminus \{x_0\}$ auf $H_0 = \{[\mathbf{z}] : z_{n+1} = 0\}$, so erhält man das Hyperebenenschnittbündel $\mathcal{O}(1)$ über H_0 (wie man leicht durch Betrachten lokaler Trivialisierungen und der zugehörigen Übergangsabbildungen sieht). Entfernt man den Nullschnitt (also H_0), so ist der Rest isomorph zu $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (kann man sich leicht überlegen, aus den Fasern des Bündels werden die Geraden durch den Nullpunkt). Bläst man im Nullpunkt auf, so bildet man eigentlich die Mannigfaltigkeit $B_{x_0}(\mathbb{P}^{n+1} \setminus H_0)$. Dabei erhält man ein Geradenbündel über dem neu entstandenen projektiven Raum, das sich als das tautologische Bündel $\mathcal{O}(-1)$ erweist. Nimmt man H_0 wieder hinzu, so fügt man jeder Faser noch einen unendlich fernen Punkt hinzu, bekommt also ein projektives Bündel. Dieses Bündel enthält sowohl $\mathcal{O}(1)$ (nach Entfernen des Nullschnittes) als auch $\mathcal{O}(-1)$ (nach Entfernen des unendlich fernen Schnittes). (Literatur hierfür und für das Folgende: (A-3), Seite 237/238, (A-5), Seite 98 - 100, (A-2), I, Seite 179, (B-6), Seite 515, evtl. (B-2), Seite 162. Etwas ausführlicher ist (B-13), Seite 71 - 74.

Ist $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $A = N(f_0, \dots, f_k)$ eine $(k+1)$ -codimensionale reguläre analytische Menge, sowie $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_k)$, so setze man

$$\begin{aligned} X &:= \{(\mathbf{w}, x) \in G \times \mathbb{P}^k : \mathbf{f}(\mathbf{w}) \in \ell(x)\} \\ &= \{(\mathbf{w}, [\mathbf{z}]) \in G \times \mathbb{P}^k : z_i f_j(\mathbf{w}) - z_j f_i(\mathbf{w}) = 0 \quad \forall i, j\}, \end{aligned}$$

und $p := \text{pr}_1 : X \rightarrow G$. Dann nennt man (X, p) die *monoidale Transformation* von G mit Zentrum A , und $E := p^{-1}(A)$ die *exceptionelle Menge*. Es ist $p : X \setminus E \rightarrow G \setminus A$ biholomorph, und für $\mathbf{w}_0 \in A$ ist $p^{-1}(\mathbf{w}_0) \cong \mathbb{P}^k$.

Auch diesen Prozess kann man verallgemeinern. Sei X eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension $k + 1$. Unter der *monoidalen Transformation* von X mit Zentrum Y versteht man eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{X}$, zusammen mit einer Hyperfläche E und einer holomorphen Abbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$, so dass gilt:

1. $p : \tilde{X} \setminus E \rightarrow X \setminus Y$ ist biholomorph.
2. $E = \mathbb{P}(N_X(Y))$.

Die monoidale Transformation existiert und ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. E wird auch hier als exzeptioneller Divisor bezeichnet, und man sagt, $\tilde{X}$ entsteht aus X durch Aufblasen längs Y . Der Divisor E definiert ein Geradenbündel $L = [E]$ auf $\tilde{X}$ mit $L|_{\mathbb{P}(N_x)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_x)}(-1)$. Nach der ersten Adjunktionsformel (vgl. Vortrag 5) ist $L|_E = N_{\tilde{X}}(E)$.

Definition: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Ein Vektorbündel $\pi : E \rightarrow X$ heißt *schwach negativ*, falls es eine streng pseudokonvexe relativ-kompakte Umgebung U des Nullschnittes Z_E gibt, so dass Z_E maximale kompakte Teilmenge von U ist. E heißt *schwach positiv*, falls E^* schwach negativ ist.

Man kann zeigen: Jedes positive Bündel ist schwach positiv. Ein Geradenbündel ist genau dann positiv, wenn es schwach positiv ist. Ein Bündel E ist genau dann schwach negativ, wenn es durch Aufblasen entstanden ist und der Nullschnitt der exzeptionelle Divisor ist. Allerdings kann es sein, dass der aufzublasende Raum Singularitäten hat (Beweise können hier nicht vorgeführt werden).

Satz: Ist $E' \rightarrow E'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Vektorbündeln und E' positiv, so ist auch E'' positiv.

Der Beweis wird einfach durch Übergang zur dualen Sequenz geführt. (vgl. (A-4))

Satz: Sind E' und E'' zwei positive Vektorbündel, so ist auch $E' \oplus E''$ positiv.

Folgerung: Das Tangentialbündel $T(\mathbb{P}^n)$ ist positiv.

BEWEIS: $\mathcal{O}(1)$ ist positiv, und man hat die Euler-Sequenz $\mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)} \rightarrow T(\mathbb{P}^n) \rightarrow 0$.

Folgerung: Ist $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, so ist $N_{\mathbb{P}^n}(Y)$ positiv.

Der Satz von Schneider im allgemeinen Fall (Sera, 10.07.)

Literatur: (A-8) „ q -positiv“ = „metrisch q -konkav“ (vgl. Vortrag 7)

Lemma: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Ist E ein q -positives holomorphes Vektorbündel vom Rang k über X , so ist $L(E)$ ein $(k + q - 1)$ -positives Geradenbündel über $\mathbb{P}(E)$.

BEWEIS: Man benutzt $E \setminus Z_E \cong L(E) \setminus Z_{L(E)}$, vermöge $v \mapsto ([v], v)$. Es sei $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ die kanonische Projektion. Sei h die Fasermetric auf E , bezüglich der E q -positiv ist. Dann definiert man $\tilde{h}$ auf $L(E)$ durch

$$\tilde{h}([z]; v, w) := h(p([z]); v, w).$$

Sei $x_0 \in X$, $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ eine bezüglich h in x_0 normale Trivialisierung von E . Dann wird h durch eine hermitesche Matrix(funktion) $H = (h_{\alpha\beta})$ beschrieben. $z_1, \dots, z_n$ seien lokale Koordinaten für X nahe x_0 , $\xi_1, \dots, \xi_k$ Faserkoordinaten auf E_{x_0} .

$p^{-1}(U)$ wird durch die Mengen $\tilde{U}_\kappa := U \times \{(\xi_1 : \dots : \xi_k) : \xi_\kappa \neq 0\}$ überdeckt, $\kappa = 1, \dots, k$. Man hat Trivialisierungen $\tilde{\varphi}_\kappa : L(E)|_{\tilde{U}_\kappa} \rightarrow \tilde{U}_\kappa \times \mathbb{C}$ mit

$$\left((x, (\xi_1 : \dots : \xi_k)), \lambda \cdot \left(\frac{\xi_1}{\xi_\kappa}, \dots, \frac{\xi_k}{\xi_\kappa} \right) \right) \mapsto \left((x, (\xi_1 : \dots : \xi_k)), \lambda \right).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \tilde{h} \left((x, (\xi_1 : \dots : \xi_k)), \frac{\lambda}{\xi_\kappa} (\xi_1, \dots, \xi_k), \frac{\mu}{\xi_\kappa} (\xi_1, \dots, \xi_k) \right) &= \\ &= h \left(x, \frac{\lambda}{\xi_\kappa} (\xi_1, \dots, \xi_k), \frac{\mu}{\xi_\kappa} (\xi_1, \dots, \xi_k) \right) \\ &= \frac{\lambda \bar{\mu}}{|\xi_\kappa|^2} \cdot \xi \cdot H(x) \cdot \bar{\xi} \\ &= \frac{\lambda \bar{\mu}}{|\xi_\kappa|^2} \cdot \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta. \end{aligned}$$

$\tilde{h}$ wird also bezüglich $\tilde{\varphi}_\kappa$ durch die Funktion

$$\tilde{h}_\kappa : (x, (\xi_1 : \dots : \xi_k)) \mapsto \frac{1}{|\xi_\kappa|^2} \cdot \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$$

beschrieben.

Sei nun $y_0 \in \mathbb{P}(E)_{x_0}$, o.B.d.A. $y_0 = (x_0, (0 : \dots : 0 : 1))$, also $\kappa = k$. Ist $\eta_\varrho := \xi_\varrho / \xi_k$, so ist $\tilde{h}_k = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta}(x) \eta_\alpha \bar{\eta}_\beta$. Weil $h_{\alpha\beta}(x_0) = \delta_{\alpha\beta}$ und $(\partial h_{\alpha\beta})_{x_0} = 0$ ist, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{h}_k}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(y_0) &= \frac{\partial^2 h_{kk}}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(x_0) \quad (\text{für alle } \nu, \mu), \\ \frac{\partial^2 \tilde{h}_k}{\partial z_\nu \partial \bar{\eta}_\beta}(y_0) &= \frac{\partial^2 \tilde{h}_k}{\partial \eta_\alpha \partial \bar{z}_\mu}(y_0) = 0 \quad (\text{für alle } \nu, \mu, \alpha, \beta) \\ \text{und } \frac{\partial^2 \tilde{h}_k}{\partial \eta_\alpha \partial \bar{\eta}_\beta}(y_0) &= \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{für alle } \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist E q -positiv. Also hat $\left(\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(x_0) v_\alpha \bar{v}_\beta \mid \nu, \mu = 1, \dots, n \right)$ für jedes $\mathbf{v} =$

$(v_1, \dots, v_k) \neq \mathbf{0}$ mindestens $n - q + 1$ negative Eigenwerte. Insbesondere hat dann $\left(\frac{\partial^2 h_{kk}}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(x_0) \right)$ mindestens $n - q + 1$ negative Eigenwerte, und letzteres gilt dann auch für die Levi-Matrix von $\tilde{h}_k$ in y_0 . Es ist

$$n - q + 1 = (n + (k - 1)) - (k + q - 1) + 1 = \dim \mathbb{P}(E) - (k + q - 1) + 1.$$

Also ist $L(E)$ $(k + q - 1)$ -positiv.

Satz: *Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine abgeschlossene k -codimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit mit q -positivem Normalenbündel. Dann ist $X \setminus Y$ eine $(k + q - 1)$ -konvexe Mannigfaltigkeit.*

BEWEIS: Man bläst X längs Y auf. Sei X' diese erhaltende monoidale Transformation und $Y' \subset X'$ der exzeptionelle Divisor. Sei $\pi : X' \rightarrow X$ die zugehörige holomorphe Abbildung, so dass $\pi : X' \setminus Y' \rightarrow X \setminus Y$ biholomorph ist, sowie $Y' = \mathbb{P}(N_X(Y))$. Sei $N = N_X(Y)$. Dann ist $L(N)$ $(k + q - 1)$ -positiv. Es ist $L(N) = N_{X'}(Y')$ (siehe Vortrag 9). Nach dem Hyperflächenfall (vgl. Vortrag 8) ist dann $X' \setminus Y'$ $(k + q - 1)$ -konvex, also auch $X \setminus Y$.

Folgerung: *Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine abgeschlossene k -codimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit mit q -positivem Normalenbündel. Dann gilt für jede kohärente analytische Garbe $\mathcal{F}$ auf $X \setminus Y$:*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^i(X \setminus Y, \mathcal{F}) < \infty \quad \text{für } i \geq k + q - 1.$$

Man braucht dazu die Andreotti/Grauert-Theorie (Vortrag 3).

Folgerung: *Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine abgeschlossene k -codimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit mit positivem Normalenbündel. Dann ist $X \setminus Y$ eine k -konvexe Mannigfaltigkeit.*

Klar, denn 1-positiv bedeutet „positiv“ (Vortrag 7).

Folgerung: *Sei $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine abgeschlossene k -codimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit. Dann ist $\mathbb{P}^n \setminus Y$ eine k -konvexe Mannigfaltigkeit.*

Das folgt aus der Positivität des Tangentialbündels des $\mathbb{P}^n$.

Ersatztermin (17.07.)

Literatur:

(A) Im Ordner zum Kopieren:

1. G. H. Henkin / J. Leiterer: Andreotti-Grauert Theory by Integral Formulas
2. M. Field: Several Complex Variables and Complex Manifolds I/II
3. K. Fritzsche / H. Grauert: From Holomorphic Functions to Complex Manifolds
4. K. Fritzsche: Ein Kriterium für die q -Konvexität von Restmengen in kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten (Dissertation 1975)
5. D. Huybrechts: Complex Geometry
6. J. Michel: Integralformeln in der komplexen Analysis (Dissertation 1981)
7. R. Narasimhan: Compact Analytical Varieties
(in: Topics in Several Complex Variables, Douady/Grauert/Malgrange/Narasimhan/Stein)
8. M. Schneider: Über eine Vermutung von Hartshorne, Math. Ann 201, 221-229 (1973)
9. F. Zheng: Complex Differential Geometry

(B) Ergänzende Literatur:

1. J. Dieudonné: Grundzüge der modernen Analysis 3
2. G. Fischer: Complex Analytic Geometry
3. H. Grauert / Th. Peternell / R. Remmert: Several Complex Variables VII
(Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol 74)
4. H. Grauert / K. Fritzsche: Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher
5. H. Grauert / R. Remmert: Coherent Analytic Sheaves
6. Ph. Griffiths / J. Harris: Principles of Algebraic Geometry
7. R. Hartshorne: Ample Subvarieties of Algebraic Varieties. Springer Lecture Notes **156** (1970)
8. D. Husemoller: Fibre Bundles
9. R. Lazarsfeld: Positivity in Algebraic Geometry I/II
10. St. Lojasiewicz: Introduction to Complex Analytic Geometry
11. W. Lück: Algebraische Topologie
12. R. Narasimhan: Analysis on Real and Complex Manifolds
13. I.R. Shafarevich: Basic Algebraic Geometry 2 (second edition)
14. R. O. Wells jr.: Differential Analysis on Complex Manifolds

(C) Ergänzende und weiterführende Zeitschriftenartikel:

1. A. Andreotti / H. Grauert: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bull.Soc.math.France **90**, 193 - 259 (1962)
2. W. Barth: Der Abstand von einer algebraischen Mannigfaltigkeit im komplex-projektiven Raum. Math.Ann. **187**, 150 - 162 (1970)
3. M. Buchner / K. Fritzsche / T. Sakai: Geometry and cohomology of certain domains in the complex projective space. Crelles Journal **323**, 1 - 52 (1981)
4. K. Fritzsche: q -konvexe Restmengen in kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten. Math.Ann. **221**, 251 - 273 (1976)
5. H. Grauert: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math.Ann. **146**, 331 - 368 (1962)
6. A. Sommese: Concavity Theorems. Math.Ann. **235**, 37 - 53 (1978)
7. G. Sorani / V. Villani: q -complete spaces and cohomology. Transactions of the AMS **125**, 432 - 448 (1966)
8. V. Văjăitu: On the equivalence of the definitions of q -convex spaces. Archiv der Mathematik **61**, 567 - 575 (1993)