Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

3 Geodätische (Vortrag Nr. 11)

Sei S eine Fläche und α die ausgezeichnete Parametrisierung einer Kurve auf S, $p = \alpha(t) \in S$ und $T := \alpha'(t)$. Außerdem sei N der (durch die Orientierung der Fläche festgelegte) Normalenvektor in p. Weil $\{N, T, N \times T\}$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und $\langle \alpha'', \alpha' \rangle \equiv 0$, gibt es Koeffizienten κ_n und κ_g, so dass gilt:

$$\alpha''(t) = \kappa_n N + \kappa_g (N \times T).$$

Dabei liegt $N \times T$ in $T_p(S)$.

Sei N_α der Hauptnormalenvektor zu α in p (siehe Vortrag über Raumkurven) und $\kappa = \|\alpha''(t)\|$ die Krümmung der Kurve α. Dann ist

$$\kappa^2 = \langle \alpha''(t)\,,\, \alpha''(t) \rangle = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \quad \text{und} \quad \kappa N_\alpha = \alpha''(t),$$

also

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \langle \alpha''(t)\,,\, N \rangle \;=\; \kappa \cdot \langle N_\alpha\,,\, N \rangle \\ &= \kappa \cdot \cos\psi, \end{aligned}$$

wobei ψ der Winkel zwischen N_α und N ist. Mit dem Satz von Meusnier folgt, dass $\kappa_n = \kappa_N$ die schon bekannte Normalenkrümmung ist.

$\kappa_g = \langle \alpha''(t)\,,\, N \times T \rangle$ heißt ***geodätische Krümmung***. Die Kurve α heißt eine ***Geodätische***, falls $\kappa_g \equiv 0$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\alpha''(t)$ parallel zu N ist (also $= 0$ oder senkrecht zu S ist). Zum Beispiel ist jede Gerade eine Geodätische. Und auch der Schnitt von S mit einer zu $T_p(S)$ senkrechten Ebene ist eine Geodätische. Damit werden Großkreise auf der Sphäre erfasst.

Satz von Minding: *Die geodätische Krümmung ist intrinsisch.*

Satz: *Ist α eine ausgezeichnet parametrisierte Kurve, so dass ihre Länge zwischen zwei Punkten immer die kürzest-mögliche ist, so ist α eine Geodätische.*

Der BEWEIS wird mit Variationsrechnung geführt.

Wenn noch Zeit bleibt, kann das Folgende behandelt werden:

Sei S eine Fläche, $\alpha : I \to S$ eine parametrisierte Kurve. Ein ***Vektorfeld längs*** α ist eine Abbildung $w : I \to \mathbb{R}^3$ mit $w(t) \in T_{\alpha(t)}(S)$ für alle $t \in I$. Man kann schreiben:

$$w(t) = a(t)\varphi_u(\alpha(t)) + b(t)\varphi_v(\alpha(t)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} w'(t) &= a'(t)\varphi_u(\alpha(t)) + b'(t)\varphi_v(\alpha(t)) \\ &\quad + a(t)\big[\varphi_{uu}(\alpha(t))\alpha_1'(t) + \varphi_{uv}(\alpha(t))\alpha_2'(t)\big] + b(t)\big[\varphi_{uv}(\alpha(t))\alpha_1'(t) + \varphi_{vv}(\alpha(t))\alpha_2'(t)\big]. \end{aligned}$$

Schreibt man φ_{uu}, φ_{uv} und φ_{vv} jeweils wieder als Linearkombination von φ_u, φ_v und N und fasst man alle Terme bei φ_u und φ_v zusammen, so erhält man die tangentiale Komponente von $w'(t)$. Die nennt man ***kovariante Ableitung*** und schreibt dafür $\dfrac{Dw}{dt}$. Ist überall $\dfrac{Dw}{dt} = 0$, so nennt man w ***parallel*** (oder *parallelverschoben*).

α ist genau dann eine Geodätische, wenn $\dfrac{D\alpha'}{dt} = 0$ ist, wenn also $\alpha''(t)$ verschwindet oder auf S senkrecht steht (s.o.).

4 Kartenprojektionen (Vortrag Nr. 12)

Sei $R \subset S^2$ eine offene Teilmenge (in der Relativtopologie). Ein Diffeomorphismus $p : R \to U \subset \mathbb{R}^2$ ist eine „ideale Kartenprojektion“, falls p Längen, Winkel und Flächeninhalte erhält.

Satz: *Es gibt keine ideale Kartenprojektion.*

Zum Beweis betrachte ein Dreieck auf der Sphäre, dessen Seiten Großkreise, also Geodätische sind.

Sei S eine Fläche. Der ***Winkel*** zwischen zwei Kurven $\alpha, \beta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to S$ mit $\alpha(0) = \beta(0)$ ist der Winkel zwischen den Vektoren $\alpha'(0)$ und $\beta'(0)$. Ein Diffeomorphismus $F : S_1 \to S_2$ heißt ***konform***, falls er winkeltreu ist, falls also immer der Winkel zwischen $F \circ \alpha$ und $F \circ \beta$ mit dem Winkel zwischen α und β übereinstimmt. Die Abbildung F heißt ***flächentreu***, falls sie Flächeninhalte erhält.

Satz: *Ein Diffeomorphismus $F : S_1 \to S_2$ ist genau dann konform, wenn es eine positive Funktion $\lambda : S_1 \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $p \in S_1$ und $v, w \in T_p(S_1)$ gilt:*

$$I_p(v, w) = \lambda(p) \cdot I_{F(p)}(F_{*,p}v, F_{*,p}w).$$

Sei $\varphi : (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \to S^2$ definiert durch

$$\varphi(\psi, \theta) := (\cos\psi\cos\theta, \sin\psi\cos\theta, \sin\theta).$$

Dabei beschreibt ψ die geographische Länge (von Greenwich aus gemessen) und θ die geographische Breite (vom Äquator aus gemessen). In diesen Koordinaten ist $E = \cos^2\theta$, $F = 0$ und $G = 1$.

Satz: $p : R \to \mathbb{R}^2$ sei eine Kartenprojektion, und $\widetilde{E}, \widetilde{F}, \widetilde{G}$ seien die metrischen Koeffizienten der Karte $p \circ \varphi$ für den $\mathbb{R}^2$. Gibt es eine positive Funktion λ, so dass $\widetilde{E} = \lambda \cdot \cos^2\theta$, $\widetilde{F} = 0$ und $\widetilde{G} = \lambda$ ist, so ist p konform. Ist $\widetilde{E}\widetilde{G} - \widetilde{F}^2 = \cos^2\theta$, so ist p flächentreu.

Hier folgen nun einige wichtige Beispiele:

1. **Die stereographische Projektion.**

   Die Sphäre $S = \{(x, y, z+1) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ wird vom Nordpol $T = (0, 0, 2)$ aus auf die Ebene $\{(x, y, z) : z = 0\}$ projiziert. Das ergibt die Abbildung $p : (x, y, z) \mapsto (u, v, 0) = \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, 0\right)$, und man erhält:

   $$\widetilde{E}(\psi, \theta) = \frac{4\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)^2}, \quad \widetilde{F}(\psi, \theta) = 0 \quad \text{und } \widetilde{G}(\psi, \theta) = \frac{4}{(1-\sin\theta)^2}.$$

   Dann sieht man: p ist konform, aber nicht flächentreu.

2. **Die Mercator-Projektion.**

   Längenkreise (zwischen Nord- und Südpol, $\psi = \text{const.}$) heißen *Meridiane*, Breitenkreise oder *Parallelkreise* sind durch $\theta = \text{const.}$ gegeben. Eine Kurve, die mit allen Meridianen einen festen Winkel bildet, heißt *Loxodrome*. Diese sind in der Navigation besonders beliebt. Mercator konstruierte eine Kartenprojektion mit den folgenden Eigenschaften:

   a) Die Bilder von Meridianen und Parallelkreisen sind orthogonal zueinander.

   b) Loxodrome werden auf Geraden abgebildet.

Damit eine Kurve auf der Sphäre eine Loxodrome ist, muss sie eine gewisse Differentialgleichung erfüllen. Die Bedingungen (a) und (b) schränken weiter ein. Die Mercator-Projektion $p_M : S^2 \to \mathbb{R}^2$ muss die Gleichungen

$$p_M \circ \varphi(\psi, \theta) = (\psi, v(\theta), 0) \quad \text{und} \quad \frac{dv}{d\theta} = \frac{b}{\cos\theta} \text{ (mit einer Konstanten } b\text{)}$$

erfüllen. Sie ist genau dann konform, wenn $b = \pm 1$ ist. Löst man die Differentialgleichung, so erhält man eine explizite Beschreibung der Mercator-Projektion.

3. **Lamberts Zylinder-Projektion.**

   Projiziert wird von der Mittelachse aus auf einen Zylinder, der der Sphäre umbeschrieben ist. Dann wird der Zylinder zu einer Ebene ausgerollt. Daher ist die Zylinder-Projektion $p_Z : S^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $p_Z \circ \varphi(\psi, \theta) = (\psi, \sin\theta, 0)$. Dann folgt sehr leicht, dass p_Z flächentreu ist. Außerdem werden Meridiane auf vertikale und Breitenkreise auf horizontale Geraden abgebildet.