

Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Inhaltsverzeichnis:

1. Hilfsmittel (Fritzsche)
2. Parametrisierte Kurven (Ballnus, 29.10.)
3. Ebene Krümmung (Ballnus, 05.11.)
4. Raumkurven (Stergiou, 12.11.)
5. Globale Eigenschaften (Nietz, 19.11.)
6. Parametrisierte Flächen (Kintscher, 26.11.)
7. Erste Fundamentalform (Kintscher oder Ding, 03.12.)
8. Normalkrümmungen (Brüder, 10.12.)
9. Gauß'sche Krümmung (Brüder, 17.12.)
10. Theorema egregium (Lommerzheim, 07.01.2010)
11. Geodätische (Schächt, 14.01.)
12. Kartenprojektionen (Agzibüyük, 21.01.)
13. 28.01. und 04.02.: Reserve-Termine

2 Flächen (Vorträge Nr. 6 und 7)

Ein **parametrisiertes (reguläres) Flächenstück** $S \subset \mathbb{R}^3$ ist das Bild einer beliebig oft differenzierbaren Abbildung $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass gilt:

1. P ist eine offene, zusammenhängende Menge im $\mathbb{R}^2$, φ ist injektiv.
2. $\text{rg } J_\varphi(u) = 2$ für alle $u \in P$.
3. Ist $u_0 \in P$ und $(u_\nu) \in P$ eine Folge mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi(u_\nu) = \varphi(u_0)$, so ist auch $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = u_0$

(vgl. dazu GK Analysis 2, Abschnitt 1.5). Dann ist S (mit der Relativtopologie) homöomorph zu P (vgl. Lemma 1.5.7 in GK Analysis 2 und Proposition 4 in 2.2 in do Carmo). Eine **reguläre Fläche** ist eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$, so dass es zu jedem $x \in S$ eine offene Umgebung $U = U(x) \subset \mathbb{R}^3$ existiert, so dass $S \cap U$ ein parametrisiertes reguläres Flächenstück ist.

Jedes Flächenstück $S \subset \mathbb{R}^3$ kann lokal als „Niveaufläche“ $f^{-1}(0)$ (mit einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^3$, und $\nabla f(x) \neq 0$) dargestellt werden. Zwei verschiedene Parametrisierungen gehen durch differenzierbare Parametertransformationen auseinander hervor (siehe do Carmo, Proposition 1 in 2.3; im GK Analysis 2 wird das Gleiche für p -dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$ gemacht, im Abschnitt 1.5). Dadurch ist es möglich, differenzierbare Funktionen auf Flächen zu definieren.

Ist $\varphi : P \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück, so heißt $T_{\varphi(u)}(S) := \text{Im } D\varphi(u)$ die **Tangentialebene** an S in $\varphi(u)$. Jeder „Tangentenvektor“ $v \in T_p(S)$ ist Tangentenvektor $\alpha'(0)$ einer Kurve $\alpha : I \rightarrow S$ mit $\alpha(0) = p$ (und umgekehrt).

Ist $F : S_1 \rightarrow S_2$ eine differenzierbare Abbildung und $v = \alpha'(0) \in T_p(S_1)$, so setzt man

$$F_{*,p}(v) := (F \circ \alpha)'(0).$$

Dadurch wird eine lineare Abbildung $F_{*,p} : T_p(S_1) \rightarrow T_{F(p)}(S_2)$ definiert, die „Tangentialabbildung“. Ist sie ein Isomorphismus, so ist F lokal nahe p ein Diffeomorphismus. In der Literatur gibt es für die Tangentialabbildung $F_{*,p}$ noch andere Bezeichnungen, z.B. dF_p .

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Die quadratische Form $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I_p(v) := v \cdot v$ (euklidisches Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$) heißt **erste Fundamentalform** auf S . Manchmal bezeichnet man auch das Skalarprodukt selbst mit I_p .

Eine Parametrisierung φ definiert eine Basis $\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$ des Tangentialraums (u, v seien die beiden Parameter). Nach Gauß definiert man für $\mathbf{u} = (u, v) \in P$ und $p := \varphi(\mathbf{u}) \in S$:

$$E(\mathbf{u}) := \varphi_u(p) \cdot \varphi_u(p) = I_p(\varphi_u(p)),$$

$$F(\mathbf{u}) := \varphi_u(p) \cdot \varphi_v(p),$$

$$G(\mathbf{u}) := \varphi_v(p) \cdot \varphi_v(p) = I_p(\varphi_v(p)).$$

Ist $v = \alpha'(0) \in T_p(S)$ und schreibt man $\alpha = \varphi \circ (a_1, a_2)$ mit einer differenzierbaren Kurve (a_1, a_2) im $\mathbb{R}^2$, so ist $v = a'_1 \varphi_u + a'_2 \varphi_v$ und $I_p(v) = E \cdot (a'_1)^2 + 2F \cdot a'_1 a'_2 + G \cdot (a'_2)^2$. So kann man in lokalen Koordinaten rechnen.

Es ist $\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}$. Diese Größe spielt eine wichtige Rolle bei der Berechnung des Flächeninhaltes eines Flächenstücks: Ist $Q \subset P$ und $K := \varphi(Q)$ kompakt, so ist $\mu(K) := \int_Q \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv$ der **Flächeninhalt** von K .

Die Wahl einer Parametrisierung φ induziert durch die Basis $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ (und ihre Anordnung) eine **Orientierung** der Tangentialräume. Die Fläche S heißt **orientierbar**, falls man S so mit Koordinaten überdecken kann, dass alle Kartenwechsel positive Funktionaldeterminante haben. Man kann zeigen, dass S genau dann orientierbar ist, wenn es auf S ein differenzierbares Einheitsnormalenfeld gibt. Das Möbiusband ist ein Beispiel einer nicht orientierbaren Fläche. Niveauflächen $f^{-1}(0)$ sind immer orientierbar.

3 Flächenkrümmung (Vorträge Nr. 8, 9 und 10)

Die ersten Ergebnisse gehen auf Euler zurück (1760). Sei S eine Fläche, $p \in S$ und N ein Normalenvektor (zunächst willkürlich gewählt). Jeder Tangentialvektor $v \in T_p(S)$ spannt mit N eine Ebene $E(v)$ auf, die mit $\{v, N\}$ orientiert wird. Der Schnitt $E(v) \cap S$ ist Bild einer Kurve α_v mit $\alpha_v(0) = p$, und diese hat in $E(v)$ eine orientierte Krümmung $\kappa_N(v)$, die **Normalenkrümmung** von S in p in Richtung v .

Satz: Wenn die Normalenkrümmung $v \mapsto \kappa_N(v)$ nicht konstant ist, gibt es genau zwei (aufeinander senkrecht stehende) Einheitsvektoren $v_1, v_2 \in T_p(S)$, so dass $\kappa_1 := \kappa_N(v_1)$ maximal und $\kappa_2 = \kappa_N(v_2)$ minimal ist.

Man nennt κ_1, κ_2 die **Hauptkrümmungen** von S in p , und v_1, v_2 die **Hauptkrümmungsrichtungen**.

Der Punkt p heißt

- **elliptisch**, falls κ_1, κ_2 das gleiche Vorzeichen besitzen,
- **hyperbolisch**, falls κ_1 und κ_2 verschiedene Vorzeichen haben,
- **parabolisch**, falls genau eine der Hauptkrümmungen verschwindet
- und **flach**, falls $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ ist.

Satz von Meusnier: Sei F eine Ebene, die $v \in T_p(S)$ enthält, und θ der Winkel zwischen F und der Normalenebene $E(v)$. Ist κ_θ die Krümmung der Kurve $F \cap S$ in p , so ist

$$\kappa_N(v) = \kappa_\theta \cdot \cos \theta.$$

Bemerkung: Die Größe $\kappa_\theta \cdot \cos \theta$ nennt man auch die „Normalkrümmung“ von $F \cap S$ in p . Dann kann der Satz von Meusnier auch folgendermaßen formuliert werden: Alle Kurven auf S durch p mit dem gleichen Tangentialvektor v in p haben die gleiche Normalkrümmung in p .

Gauß entwickelte eine Flächentheorie, die sich auf die inneren Eigenschaften der Fläche konzentrierte (1827). Im Folgenden Sei S stets eine orientierbare Fläche.

Die **Gauß-Abbildung** $N : S \rightarrow S^2$ wird definiert durch

$$N(p) := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}.$$

Man kann zeigen, dass N eine differenzierbare Abbildung ist. Allerdings hängt N von den Koordinaten ab. Wenn man allerdings eine Orientierung auf S wählt, kann man ein differenzierbares Einheitsnormalenfeld auf S finden, und dann kann man die Parametrisierung φ immer so wählen, dass N in die Richtung des Einheitsnormalenfeldes zeigt (und daher mit ihm übereinstimmt).

Das Spannende an der Gaußabbildung ist die zugehörige Tangentialabbildung $N_{*,p} : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(S^2)$. Weil einerseits $T_p(S)$ die Ebene durch den Nullpunkt ist, die auf $N(p)$ senkrecht steht, und andererseits auch $T_{N(p)}(S^2)$ die Ebene durch den Nullpunkt ist, die auf $N(p)$ senkrecht steht, kann man die beiden miteinander identifizieren (man beachte, dass Vektoren immer als Vektoren im Nullpunkt aufgefasst werden können, und das gilt auch für die Tangentialvektoren an eine Fläche). Also haben wir einen **Endomorphismus** $N_{*,p} : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$, und für die Untersuchung von Endomorphismen gibt es in der linearen Algebra einen umfangreichen Apparat. Die Abbildung $L := -N_{*,p} : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ nennt man die **Weingartenabbildung** oder den **Gestalt-Operator**.

Ist V ein reeller Vektorraum mit innerem Produkt $\langle \dots, \dots \rangle$, so nennt man einen Endomorphismus $L : V \rightarrow V$ **selbstadjungiert**, falls $\langle L(v), w \rangle = \langle v, L(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$ gilt.

Satz: Die Weingartenabbildung L ist selbstadjungiert (bezüglich der ersten Fundamentalform). Die quadratische Form $II_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$II_p(v) := I_p(L(v), v) = -I_p(N_{*,p}(v), v)$$

heißt **zweite Fundamentalform** auf S .

Für $v \in T_p(S)$ mit $I_p(v) = 1$ ist $II_p(v) = \kappa_N(v)$. Das erklärt, warum das Minuszeichen eingefügt wurde. Die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform sind die Hauptkrümmungen, die zugehörigen Eigenvektoren sind die Hauptkrümmungsrichtungen (unter den Eigenwerten und Eigenvektoren von II_p versteht man die von L).

Definition: $K := \det(N_{*,p})$ heißt **Gauß'sche Krümmung**, $H := -\text{Spur}(N_{*,p})/2$ heißt **mittlere Krümmung** von S in p .

Sind κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen, so ist

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \quad \text{und} \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Versieht man $T_p(S)$ mit der Basis $\{\varphi_u, \varphi_v\}$, so kann man alle betrachteten Größen in lokalen Koordinaten bezüglich dieser Basis ausrechnen. Schreibt man

$$N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \quad \text{und} \quad N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v,$$

so wird $N_{*,p}$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ beschrieben. Weiter sei

$$\begin{aligned} e &:= -\langle N_u, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_{uu} \rangle, \\ f &:= -\langle N_v, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_{uv} \rangle = -\langle N_u, \varphi_v \rangle \\ \text{und } g &:= -\langle N_v, \varphi_v \rangle = \langle N, \varphi_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

(Die Gleichungen kommen zustande, weil $\langle N, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_v \rangle = 0$ ist; man differenziere dann einfach!)

Mit den in (2) eingeführten Größen E, F und G folgt dann:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

und deshalb

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

und

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Ist $K(p) \neq 0$, so folgt außerdem:

$$K(p) = \lim_{U \rightarrow p} \frac{\mu(N(U))}{\mu(U)},$$

wobei U Umgebungen von p durchläuft und μ die Flächeninhaltsfunktion bezeichnet.

Ein Diffeomorphismus $F : S_1 \rightarrow S_2$ zwischen Flächen heißt eine **Isometrie**, falls für alle $p \in S_1$ und alle $v, w \in T_p(S_1)$ gilt:

$$I_p(v, w) = I_{F(p)}(F_{*,p}v, F_{*,p}w).$$

Ein herausragender Satz von Gauß (lateinisch Theorema Egregium) behandelt die Tatsache, dass die zunächst extrinsisch - d.h. durch Bezug auf den umgebenden 3-dimensionalen Raum - definierte Gauß-Krümmung in Wirklichkeit eine intrinsische Größe ist, d.h. von „2-dimensionalen“ Bewohnern der Fläche direkt bestimmt werden kann. Eigenschaften einer Fläche, die unter Isometrien erhalten bleiben, sind intrinsisch.

Ist $F : S_1 \rightarrow S_2$ eine Isometrie, so gibt es zu jedem Punkt $p \in S_1$ Parametrisierungen $\varphi : P \rightarrow S_1$ um p und $\psi : Q \rightarrow S_2$ um $F(p)$, so dass die Größen E, F, G in beiden Fällen die gleichen Werte aufweisen. Längen, Winkel und Flächeninhalte bleiben erhalten.

Umgekehrt kann man zeigen, dass der Koordinatenwechsel zwischen zwei Parametrisierungen (vgl. Vortrag 6) mit identischen Größen E, F, G eine lokale Isometrie ist.

Ist φ Parametrisierung einer Fläche S , so ist $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, und jeden anderen Vektor kann man als Linearkombination der Basisvektoren schreiben. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N, \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_2 N, \\ \text{und } \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_3 N, \\ \text{sowie } N_u &= a_{11} \varphi_u + a_{21} \varphi_v \\ \text{und } N_v &= a_{12} \varphi_u + a_{22} \varphi_v.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten Γ_{ij}^k heißen **Christoffel-Symbole**, und es zeigt sich, dass

$$L_1 = e, \quad L_2 = f \quad \text{und} \quad L_3 = g$$

ist. Man rechnet nach:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{pmatrix} \\ \text{und } \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Werte der Christoffel-Symbole hängen also nur von den metrischen Koeffizienten E, F, G und deren Ableitungen ab. Unter Isometrien bleiben sie unverändert.

Theorema Egregium (Gauß): Die Gauß'sche Krümmung ist intrinsisch, also invariant unter lokalen Isometrien.

Zum Beweis rechnet man nach, dass die folgende Formel gilt.

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -EK.$$

Also hängt K nur von den Christoffelsymbolen und deren Ableitungen ab.