Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

1 Kurven

Ausgezeichnete Parametrisierung (P. nach der Bogenlänge): $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$.

Lemma: Ist $n(t) \equiv 1$, so ist $n'(t) \bullet n(t) \equiv 0$.

Bogenlänge: $s(t) := \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\|\, du$.

Ist α regulär (also $\alpha'(u) \neq 0$), so ist s differenzierbar und $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$. Jede reguläre Kurve besitzt eine ausgezeichnete Parametrisierung.

Sei α eine ausgezeichnet parametrisierte Kurve. Dann ist $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ die ***Krümmung*** bei $\alpha(s)$.

Ist α beliebig regulär, so ist $\kappa = \dfrac{\|\alpha'' \times \alpha'\|}{\|\alpha'\|^3}$.

Bei **ebenen Kurven** ist man noch genauer. Identifiziere $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$. Sei α ausgezeichnet parametrisiert, $T := \alpha'$, $N := \mathrm{i} \cdot T$. Dann ist $\alpha'' = T'$ orthogonal zu T, also parallel zu N. Die Basis $\{T, N\}$ heißt „begleitendes Zweibein“. Definiere die ***orientierte Krümmung*** κ_o durch

$$\alpha'' = \kappa_o \cdot N.$$

Dann ist $T' \bullet N = \kappa_o$ und $\kappa = |\kappa_o|$. Zu jeder Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ gibt es eine ausgezeichnete Parametrisierung $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa_o = g$. Es gelten die Frenet'schen Formeln:

$$\begin{array}{rcrr} T'(s) & = & & \kappa_o N, \\ N'(s) & = & -\kappa_o T & \end{array}$$

Sei $\kappa_o(s) \neq 0$. Betrachtet man s_1, s_2, s_3 nahe s, so liegen die drei Punkte $x_i = \alpha(s_i)$ nicht auf einer Geraden und bestimmen eindeutig einen Kreis. Lässt man die s_i gegen s streben, so streben die zugehörigen Kreise gegen den „Schmiegkreis“ mit Mittelpunkt $c(s)$ auf der Normalen und Radius $1/\kappa(s)$.

Raumkurven: Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine ausgezeichnet parametrisierte Raumkurve, $T = \alpha'$. Weil T' senkrecht auf T steht, nennt man $N := \dfrac{1}{\kappa} T'$ den ***Hauptnormalenvektor***.

$B := T \times N$ heißt ***Binormalenvektor***. Dann ist $\{T, N, B\}$ eine positiv orientierte ON-Basis des $\mathbb{R}^3$, das „begleitende Dreibein“. Die von T und N aufgespannte Ebene heißt „Schmiegebene“, die von T und B aufgespannte Ebene die „rektifizierende Ebene“ und die von N und B aufgespannte die „Normalenebene“. Es gelten die Frenet'schen Formeln:

$$\begin{array}{rcrrr} T'(s) & = & & \kappa_o N, & \\ N'(s) & = & -\kappa_o T & & +\tau B, \\ B'(s) & = & & -\tau N & \end{array}$$

Der Faktor $\tau = N' \bullet B$ heißt die ***Torsion***. Es gibt Formeln für T, N, B und τ im Falle beliebiger regulärer Kurven. Sind Krümmung, Torsion und Anfangswerte für T, N, B gegeben, so gibt es dazu eine eindeutig bestimmte Kurve.

Ist die Krümmung konstant und die Torsion $= 0$, liegt ein Kreis vor

Globale Eigenschaften von Kurven:

Eine ***einfach geschlossene Kurve*** ist durch eine periodische Parametrisierung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit kleinster Periode $a > 0$ gegeben. Man spricht von einer „Jordan-Kurve". Dafür gilt der ***Jordan'sche Kurvensatz***: Das Komplement von $C = \alpha(\mathbb{R})$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten (dem Inneren $I(C)$ und dem Äußeren $A(C)$), C ist gleichzeitig Rand von $I(C)$ und von $A(C)$. Der Satz wird im Seminar **nicht** bewiesen. Im Folgenden geht es um einfach-geschlossene Kurven.

1. Die isoperimetrische Ungleichung: Sei ℓ die Länge der Kurve und F der Flächeninhalt von $I(C)$. Dann ist $\ell^2 - 4\pi F \geq 0$, und die Gleichheit gilt genau dann, wenn die Kurve ein Kreis ist.

Das bedeutet, dass bei fester Länge der Kreis diejenige Kurve ist, die das Gebiet mit größtmöglichem Flächeninhalt berandet.

2. Der Vier-Scheitel-Satz:

$\alpha(t)$ heißt ***Scheitel***, wenn $\kappa_o'(t) = 0$ ist. Das bedeutet in der Regel, dass κ_o dort ein Maximum oder Minimum hat

Es gilt: Eine einfach geschlossene, ebene, konvexe Kurve hat mindestens vier Scheitel.