Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

1 Hilfsmittel

1.1 Erinnerung an die Analysis 2

$f : B \to \mathbb{R}$ heißt in $\mathbf{x}_0$ ***(total) differenzierbar***, wenn es eine Linearform $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : B \to \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

1. $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

2. $\displaystyle\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$.

Die Linearform $Df(\mathbf{x}_0) := L$ nennt man die ***(totale) Ableitung*** von f in $\mathbf{x}_0$. Es gibt einen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, so dass $Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{h}$ ist. Man nennt diesen Vektor $\nabla f(\mathbf{x}_0) := \mathbf{a}$ den ***Gradienten*** von f in $\mathbf{x}_0$. Es gilt:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\Big), \quad \text{also} \quad Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}_0).$$

Aus der totalen Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit. Aus der stetigen partiellen Differenzierbarkeit folgt die totale Differenzierbarkeit.

Ist $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbarere Abbildung (also ein parametrisierter Weg, vgl. nächster Vortrag) und f eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so gilt folgende (spezielle) **Kettenregel**:

$$(f \circ \boldsymbol{\alpha})'(t) = \nabla f\big(\boldsymbol{\alpha}(t)\big) \bullet \boldsymbol{\alpha}'(t).$$

Gelegentlich braucht man den **Mittelwertsatz**:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : B \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gibt es zu je zwei Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B$ ein $t \in (0,1)$ mit

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f\big(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})\big) \bullet (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Ist also $K \subset B$ eine kompakte, konvexe Teilmenge und f auf B sogar stetig differenzierbar (also alle partiellen Ableitungen stetig), so gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass gilt:

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| \le C \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|.$$

Das folgt mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Tatsache, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt bleiben.

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : B \to \mathbb{R}^m$ heißt in $\mathbf{a} \in B$ ***differenzierbar***, falls alle Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ in $\mathbf{a}$ differenzierbar sind.

Die durch $D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{v}) := (Df_1(\mathbf{a})(\mathbf{v}), \ldots, Df_m(\mathbf{a})(\mathbf{v}))$ gegebene lineare Abbildung

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

heißt die ***Ableitung von f in a***.

Die Matrix $J_\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, die $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ (bezüglich der Standardbasen) beschreibt, nennt man die ***Funktionalmatrix*** oder ***Jacobi-Matrix*** von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{a}$. Arbeitet man mit Zeilenvektoren, so ist

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \bullet J_\mathbf{f}(\mathbf{a})^\top.$$

Ist $m = 1$, so ist $J_f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a})$. Ist $n = 1$, so ist $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{a})^\top$. Für differenzierbare Abbildungen gilt die **allgemeine Kettenregel**:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f} : B \to \mathbb{R}^m$ in $\mathbf{x}_0 \in B$ differenzierbar, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\mathbf{f}(B) \subset U$ und $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^k$ in $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ differenzierbar. Dann ist $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : B \to \mathbb{R}^k$ in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar und es gilt:

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \circ D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad \text{bzw.} \quad J_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0).$$

Es seien nun $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei Gebiete. Eine differenzierbare Abbildung $\mathbf{f} : G_1 \to G_2$ heißt ein ***Diffeomorphismus***, wenn $\mathbf{f}$ bijektiv und $\mathbf{f}^{-1} : G_2 \to G_1$ ebenfalls differenzierbar ist. In diesem Zusammenhang ist der **Satz von der Umkehrabbildung** wichtig:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist $\mathbf{x}_0 \in M$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ und $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, so gibt es offene Umgebungen $U(\mathbf{x}_0) \subset M$ und $V(\mathbf{y}_0) \subset \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

1. $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$ *für alle* $\mathbf{x} \in U$.
2. $\mathbf{f} : U \to V$ *ist bijektiv.*
3. $\mathbf{f}^{-1} : V \to U$ *ist wieder differenzierbar.*
4. *Für* $\mathbf{x} \in U$ *und* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *ist* $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}$.

Aus dem Satz von der Umkehrabbildung folgt der **Satz über implizite Funktionen**:

Auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ sei das Gleichungssystem $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ gegeben. Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ und die Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{k+m}}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{k+1}}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{k+m}}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \end{pmatrix} \in M_{m,m}(\mathbb{R})$$

regulär, so gibt es Umgebungen $U(\mathbf{x}_0)$, $V(\mathbf{y}_0)$ mit $U \times V \subset G$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{g} : U \to V$, so dass gilt:

1. $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$.
2. *Für* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V$ *gilt:* $\quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

   Insbesondere ist $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{0}$ *für* $\mathbf{x} \in U$.
3. *Es ist* $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = -\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))\right)^{-1} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))$ *auf* U.

Dabei wird folgende Aufteilung der Jacobi-Matrix benutzt:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\middle|\; \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right).$$

Typisches Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben, $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von (x_0, y_0, z_0), so dass die Menge $M := \{(x, y, z) \,:\, f(x, y, z) = 0\}$ lokal (in U) wie der Graph einer Funktion g aussieht:

$$M \cap U = \{(x, y, z) \,:\, z = g(x, y)\}$$

Das ist das typische Modell einer Fläche im 3-dimensionalen Raum.

1.2 Differentialgleichungen

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Unter einer ***Lösung der Differentialgleichung***

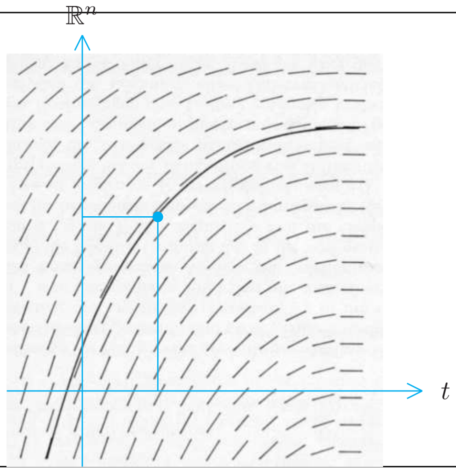
$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$$

versteht man eine Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall, und der Graph $\{(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) : t \in I\}$ liegt in G.
2. $\boldsymbol{\varphi}$ ist stetig differenzierbar, und es ist $\boldsymbol{\varphi}'(t) = F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ auf I.

Es handelt sich eigentlich um ein System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y_1' &= F_1(t, y_1, \ldots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= F_n(t.y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$



Ist $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung von $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}_0$, so sagt man, $\boldsymbol{\varphi}$ erfüllt die ***Anfangsbedingung*** $(t_0, \mathbf{x}_0)$. Die Lösung heißt *maximal*, wenn sie sich nicht zu einer Lösung mit größerem Definitionsbereich fortsetzen lässt. Man sieht sofort:

Ist $\boldsymbol{\varphi}$ Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ und $\mathbf{F}$ k-mal stetig differenzierbar, so ist $\boldsymbol{\varphi}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar.

Beweis: Definitionsgemäß ist $\boldsymbol{\varphi}$ einmal stetig differenzierbar, aber $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ ist auch wieder stetig differenzierbar. Also muss $\boldsymbol{\varphi}$ sogar zweimal stetig differenzierbar sein. Dieses Argument kann man so lange wiederholen, bis der Differenzierbarkeitsgrad von $\mathbf{F}$ erreicht ist. $\blacksquare$

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine stetige Abbildung $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ genügt auf G einer ***Lipschitz-Bedingung*** mit Lipschitz-Konstante k, falls gilt:

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_2)\| \le k \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \text{ für alle Punkte } (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in G.$$

$\mathbf{F}$ genügt *lokal* der *Lipschitz-Bedingung*, falls es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ eine Umgebung $U = U(t_0, \mathbf{x}_0) \subset G$ gibt, so dass $\mathbf{F}$ auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Letzteres ist z.B. der Fall, wenn $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x_1, \ldots, x_n)$ auf G stetig und nach den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ stetig partiell differenzierbar ist.

Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz: *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Genügt $\mathbf{F}$ lokal der Lipschitz-Bedingung, so gibt es zu jedem $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$, so dass auf*

$I := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ genau eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$ existiert.

Nun betrachten wir das globale Verhalten von Lösungen einer DGL $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Die Abbildung F genüge lokal der Lipschitz-Bedingung.

1. Schritt: Lösungskurven enden nicht!

Ist $\varphi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung, so gibt es ein $t_2 > t_1$ und eine Lösung $\widehat{\varphi} : [t_0, t_2) \to \mathbb{R}^n$ mit $\widehat{\varphi}|_{[t_0,t_1]} = \varphi$.

Beweis: Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\psi : (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. Außerdem ist

$$\psi'(t_1) = F(t_1, \psi(t_1)) = F(t_1, \varphi(t_1)) = \varphi'(t_1).$$

Also ist $\widehat{\varphi} : [t_0, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\widehat{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t_0 \le t \le t_1, \\ \psi(t) & \text{für } t_1 < t < t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

stetig differenzierbar und damit eine Lösung über $[t_0, t_1 + \varepsilon)$. ■

2. Schritt: Lösungen mit gleicher Anfangsbedingung sind eindeutig!

Sind $\varphi, \psi : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen mit $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$, so ist $\varphi = \psi$.

Beweis: Nach dem lokalen Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\varphi(t) = \psi(t)$ für $t_0 \le t < t_0 + \varepsilon$ ist. Ist $\varphi = \psi$ auf ganz $[t_0, t_1)$, so ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls sei

$$t^* := \inf\{t \in [t_0, t_1) \,:\, \varphi(t) \ne \psi(t)\}.$$

Dann ist $t_0 < t^* < t_1$, und es muss $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$ sein, denn die Menge aller t mit $\varphi(t) \ne \psi(t)$ ist offen. Wegen der lokalen Eindeutigkeit wäre dann aber auch noch in der Nähe von t^* die Gleichheit von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ gegeben. Das ist ein Widerspruch zur Definition von t^*. ■

Zusammengenommen ergibt das den **globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz**:

Zu vorgegebener Anfangsbedingung $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ gibt es Zahlen $t_-, t_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $t_- < t_0 < t_+$ und eine Lösung $\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

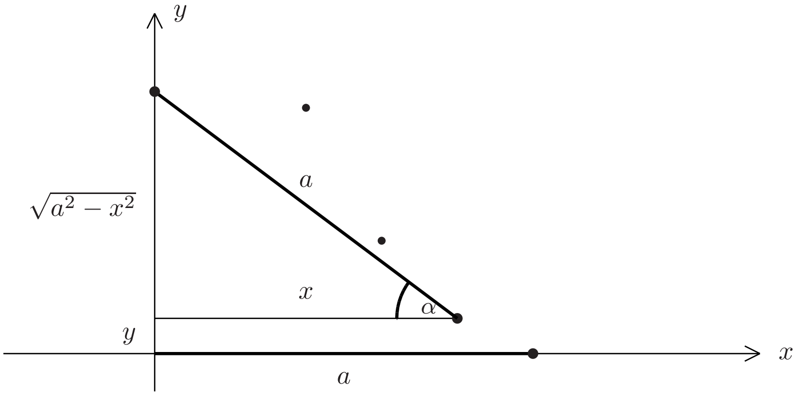
1. $\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$.
2. φ lässt sich auf kein größeres Intervall fortsetzen.
3. Ist $\psi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung mit $\psi(t_0) = \mathbf{y}_0$, so ist $\varphi = \psi$.
4. Die „Lösungskurve“ $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$ läuft in G „von Rand zu Rand“ : Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ mit $(t_0, \mathbf{y}_0) \in K$ gibt es Zahlen t_1, t_2 mit

$$t_- < t_1 < t_0 < t_2 < t_+,$$

so dass $\Phi((t_-, t_1)) \subset G \setminus K$ und $\Phi((t_2, t_+)) \subset G \setminus K$ ist.

1.3 Beispiele von Differentialgleichungen

1) Die „Hundekurve“



Suche $y = y(x)$ mit $y(a) = 0$. Dann ist $y' = -\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$. Dann ist

$$y(x) = -\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx\,.$$

Es muss nur das Integral berechnet werden. Zunächst ergibt die Substitution $x = 1/t$ (mit $dx = -dt/t^2$):

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} &= -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1/a^2}} \\ &= -\frac{1}{a}\ln\bigl(t + \sqrt{t^2 - 1/a^2}\bigr) + C \;=\; -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \widetilde{C},\end{aligned}$$

wobei man Folgendes benutzt: Schreibt man $t^2 - c^2 = (u - t)^2$, so ist $u^2 + c^2 = 2ut$, also $t = (u^2 + c^2)/(2u)$ und $dt = \bigl((u^2 - c^2)/(2u^2)\bigr)\,du$. Daraus folgt:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - c^2}} = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + C = \ln(t + \sqrt{t^2 - c^2}).$$

Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned}-\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx &= -\int \frac{a^2 - x^2}{x\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \\ &= -a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= a\cdot\ln\Bigl(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\Bigr) - \sqrt{a^2 - x^2} + C.\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung $y(a) = 0$ liefert $C = 0$. Setzt man $x = a\sin\theta$, so ist $y =$

2) Differentialgleichungen mit getrennten Variablen:

Unter einer *Differentialgleichung mit getrennten Variablen* versteht man eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(x)g(y),$$

wobei $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf geeigneten Intervallen sind.

Wir wollen das Anfangswertproblem lösen, d.h., wir suchen eine Funktion φ mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $\varphi'(x) = f(x)\cdot g(\varphi(x))$.

1. Fall: Ist $g(y_0) = 0$, so ist für jedes $x_0 \in I$ die konstante Funktion $\varphi(x) \equiv y_0$ eine Lösung mit $\varphi(x_0) = y_0$.

2. Fall: Sei $J_0 \subset J$ ein offenes Intervall, auf dem g keine Nullstellen hat, und $y_0 \in J_0$. Ist φ eine Lösung auf I mit $\varphi(x_0) = y_0$, so ist $g(\varphi(x)) \neq 0$ nahe x_0 und

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x).$$

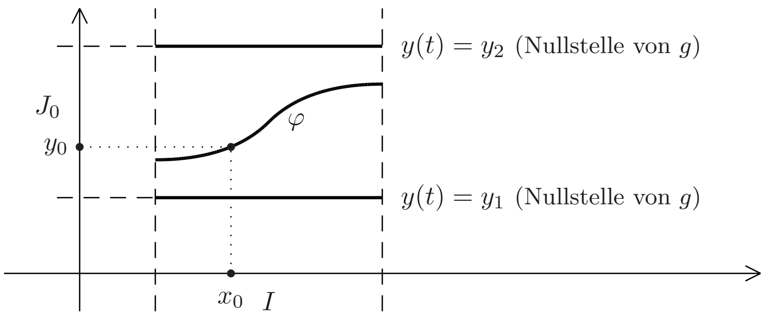
Also ist

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\,dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(u)}\,du.$$

Sei nun F eine Stammfunktion von f auf I und G eine Stammfunktion von $1/g$ auf J_0. Dann ist $F(x) - F(x_0) = G(\varphi(x)) - G(y_0)$. Außerdem ist $G'(x) = 1/g(x) \neq 0$ für $x \in J_0$, also G dort streng monoton. Damit ist G umkehrbar und

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)).$$

Die Probe zeigt sofort, dass φ tatsächlich die DGL löst.



Bemerkung: Die Physiker haben – wie immer – eine suggestive Schreibweise dafür:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \\
&\Longrightarrow \quad G(y) = F(x) + c \\
&\Longrightarrow \quad y = G^{-1}(F(x) + c).
\end{aligned}$$

Damit $y(x_0) = y_0$ ist, muss man $c = G(y_0) - F(x_0)$ wählen.

Als konkretes **Beispiel** nehmen wir die DGL $\quad y' = xy^2$. Hier ist $f(x) = x$, also $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$, sowie $g(y) = y^2$, also $G(y) = -\dfrac{1}{y}$ (auf jedem Intervall J, das nicht die Null enthält). Dann erhalten wir die Lösungen

$$y_c(x) = G^{-1}(F(x) + c) = -\frac{1}{x^2/2 + c} = -\frac{2}{2c + x^2}.$$

Hinzu kommt die konstante Lösung $y(x) \equiv 0$, die sich aus der einzigen Nullstelle von $g(y)$ ergibt.

3) Lineare Differentialgleichungen:

Eine allgemeine lineare DGL 1. Ordnung über einem Intervall I hat folgende Gestalt:

$$y' + a(x)y = r(x), \text{ mit stetigen Funktionen } a, r : I \to \mathbb{R}.$$

Ist $r(x) \equiv 0$, so spricht man vom ***homogenen*** Fall. Dann ist auf jeden Fall die Funktion $y(x) \equiv 0$ eine Lösung. Suchen wir nach weiteren Lösungen, so können wir voraussetzen, dass $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist, und es gilt:

$$(\ln|y|)'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

Ist $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ über I, so ist

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)},$$

mit einer Integrationskonstanten c, die auch ≤ 0 sein darf.

1.4 Das Vektorprodukt

Im $\mathbb{R}^3$ ist es nützlich, sich des Vektorproduktes zu bedienen.

Sind $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ zwei linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$, so ist die Zuordnung

$$\mathbf{a} \mapsto \det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

eine Linearform $\neq 0$. Deshalb gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\mathbf{u}$, so dass $\det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{u}$ für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt. Diesen Vektor $\mathbf{u}$ nennt man das ***Vektorprodukt*** von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ und bezeichnet ihn mit $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Allgemein ist also

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{für alle } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Setzt man für $\mathbf{a}$ nacheinander die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ein, so erhält man die drei Komponenten des Vektors $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ und damit die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \big(\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{v}, \mathbf{w})\big) \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1). \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften der Determinante folgt:

Das Vektorprodukt ist bilinear, es ist $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ und $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.

Ist $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, also eine ON-Basis mit

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1,$$

so gilt:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3, \ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \text{ und } \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2.$$

Das folgt daraus, dass $\mathbf{v} = (\mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{v})\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{v})\mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}_3 \bullet \mathbf{v})\mathbf{a}_3$ für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

2 Kurven

Ausgezeichnete Parametrisierung (P. nach der Bogenlänge): $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$.

Lemma: Ist $n(t) \equiv 1$, so ist $n'(t) \bullet n(t) \equiv 0$.

Bogenlänge: $s(t) := \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| \, du$.

Ist α regulär (also $\alpha'(u) \neq 0$), so ist s differenzierbar und $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$. Jede reguläre Kurve besitzt eine ausgezeichnete Parametrisierung.

Sei α eine ausgezeichnet parametrisierte Kurve. Dann ist $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ die ***Krümmung*** bei $\alpha(s)$.

Ist α beliebig regulär, so ist $\kappa = \dfrac{\|\alpha'' \times \alpha'\|}{\|\alpha'\|^3}$.

Bei **ebenen Kurven** ist man noch genauer. Identifiziere $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$. Sei α ausgezeichnet parametrisiert, $T := \alpha'$, $N := \mathsf{i} \cdot T$. Dann ist $\alpha'' = T'$ orthogonal zu T, also parallel zu N. Die Basis $\{T, N\}$ heißt „begleitendes Zweibein“. Definiere die ***orientierte Krümmung*** κ_o durch

$$\alpha'' = \kappa_o \cdot N.$$

Dann ist $T' \bullet N = \kappa_o$ und $\kappa = |\kappa_o|$. Zu jeder Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ gibt es eine ausgezeichnete Parametrisierung $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung $\kappa_o = g$. Es gelten die Frenet'schen Formeln:

$$\begin{array}{rcll} T'(s) & = & & \kappa_o N, \\ N'(s) & = & -\kappa_o T & \end{array}$$

Sei $\kappa_o(s) \neq 0$. Betrachtet man s_1, s_2, s_3 nahe s, so liegen die drei Punkte $x_i = \alpha(s_i)$ nicht auf einer Geraden und bestimmen eindeutig einen Kreis. Lässt man die s_i gegen s streben, so streben die zugehörigen Kreise gegen den „Schmiegkreis“ mit Mittelpunkt $c(s)$ auf der Normalen und Radius $1/\kappa(s)$.

Raumkurven: Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine ausgezeichnet parametrisierte Raumkurve, $T = \alpha'$. Weil T' senkrecht auf T steht, nennt man $N := \dfrac{1}{\kappa} T'$ den ***Hauptnormalenvektor***.

$B := T \times N$ heißt ***Binormalenvektor***. Dann ist $\{T, N, B\}$ eine positiv orientierte ON-Basis des $\mathbb{R}^3$, das „begleitende Dreibein“. Die von T und N aufgespannte Ebene heißt „Schmiegebene“, die von T und B aufgespannte Ebene die „rektifizierende Ebene“ und die von N und B aufgespannte die „Normalenebene“. Es gelten die Frenet'schen Formeln:

$$\begin{array}{rcllr} T'(s) & = & & \kappa_o N, & \\ N'(s) & = & -\kappa_o T & & +\tau B, \\ B'(s) & = & & -\tau N & \end{array}$$

Der Faktor $\tau = N' \bullet B$ heißt die ***Torsion***. Es gibt Formeln für T, N, B und τ im Falle beliebiger regulärer Kurven. Sind Krümmung, Torsion und Anfangswerte für T, N, B gegeben, so gibt es dazu eine eindeutig bestimmte Kurve.

Ist die Krümmung konstant und die Torsion $= 0$, liegt ein Kreis vor

Globale Eigenschaften von Kurven:

Eine ***einfach geschlossene Kurve*** ist durch eine periodische Parametrisierung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit kleinster Periode $a > 0$ gegeben. Man spricht von einer „Jordan-Kurve“. Dafür gilt der ***Jordan'sche Kurvensatz***: Das Komplement von $C = \alpha(\mathbb{R})$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten (dem Inneren $I(C)$ und dem Äußeren $A(C)$), C ist gleichzeitig Rand von

$I(C)$ und von $A(C)$. Der Satz wird im Seminar **nicht** bewiesen. Im Folgenden geht es um einfach-geschlossene Kurven.

1. Die isoperimetrische Ungleichung: Sei ℓ die Länge der Kurve und F der Flächeninhalt von $I(C)$. Dann ist $\ell^2 - 4\pi F \geq 0$, und die Gleichheit gilt genau dann, wenn die Kurve ein Kreis ist.

Das bedeutet, dass bei fester Länge der Kreis diejenige Kurve ist, die das Gebiet mit größtmöglichem Flächeninhalt berandet.

2. Der Vier-Scheitel-Satz:

$\alpha(t)$ heißt ***Scheitel***, wenn $\kappa_o'(t) = 0$ ist. Das bedeutet in der Regel, dass κ_o dort ein Maximum oder Minimum hat

Es gilt: Eine einfach geschlossene, ebene, konvexe Kurve hat mindestens vier Scheitel.

Literatur:

- Christian Bär: *Elementare Differentialgeometrie* (Walter de Gruyter 2001) `Kopie`
- Manfredo P. do Carmo: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen* (vieweg 1993)
- •• Jost-Hinrich Eschenburg / Jürgen Jost: *Differentialgeometrie und Minimalflächen* (2. Auflage, Springer 2007)
- Gerd Fischer: *Ebene algebraische Kurven*, vieweg 1994.
- •• Alfred Gray: *Differentialgeometrie*, Spektrum Verlag 1994.
- Wilhelm Klingenberg: *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie* (Springer 1973)
- Benno Klotzek: *Einführung in die Differentialgeometrie* (Verlag Harri Deutsch 1997)
- Wolfgang Kühnel: *Differentialgeometrie*, vieweg 1999. `Kopie`
- Detlef Laugwitz: *Differentialgeometrie* (Teubner 1968)
- John McCleary: *Geometry from a Differentiable Viewpoint* (Cambridge University Press 1994)
- •• Andrew Pressley: *Elementary Differential Geometry* (Springer 2001)
- Helmut Reckziegel / Markus Kriener / Knut Pawel: *Elementare Differentialgeometrie mit Maple*, vieweg 1998. `Kopie`
- Karlheinz Spallek: *Kurven und Karten* (2. Auflage, BI 1994)
- •• Karl Strubecker: *Differentialgeometrie I / II*, Sammlung Göschen 1969.
- John A. Thorpe: *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer 1979.
- Rolf Walter: *Differentialgeometrie* (BI 1978)