Kapitel 1 Wesentliche und unwesentliche Lücken bei Euklid

§ 1 Der historische Hintergrund

Die „Elemente" des Euklid enthalten die wichtigsten mathematischen Fakten, die um 300 v. Chr. bekannt waren, organisiert in 13 Bänden. Die ersten 6 Bücher blieben 2000 Jahre lang die übliche Einführung in die Geometrie.

Fast alle bekannten Versionen stammen von einer redigierten Ausgabe von **Theon von Alexandria** (um 370 *nach* Chr.) ab. Ungefähr 400 Jahre nach Theon wurde eine Kopie davon ins Arabische und um 1120 eine Kopie der arabischen Version von dem englischen Philosophen und Mönch **Adelard of Bath** ins Lateinische übersetzt. 150 Jahre später gab der italienische Wissenschaftler **Johannes Campanus** eine neue Version heraus, die andere arabische Quellen benutzte und etwas klarer und vollständiger war und schließlich auch Grundlage für die erste 1482 in Venedig erschienene gedruckte Auflage wurde. 1808 wurde in der vatikanischen Bibliothek eine vollständige Handschrift entdeckt, die auf ältere und bessere Unterlagen als die von Theon zurückging, und in der die theonische Fassung erwähnt wurde. Der dänische Philologe **J.L.Heiberg** benutzte die vorhandenen Versionen, um eine möglichst originalgetreue griechische Version von Euklids „Elementen" zu rekonstruieren. Sie wurde zwischen 1883 und 1888 veröffentlicht und bildete die Basis für alle späteren Übersetzungen, z.B. die von **Sir Thomas L. Heath** ins Englische (1908).

Die deutsche Übersetzung von **Clemens Thaer** (ursprünglich in der Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften" erschienen) ist jetzt beim Harri Deutsch Verlag erhältlich. Ich halte allerdings die englische Version von Heath für besser, sie ist bei Dover Publications, New York, zu beziehen.

§ 2 Euklids Axiomensystem

Die „Elemente" besitzen keine Einführung, sie beginnen im 1. Buch mit 23 „Definitionen", 5 „Postulaten" und einigen „Axiomen". Danach folgen unmittelbar die Sätze. In den weiteren Büchern finden sich noch allerlei Definitionen, aber keine Postulate oder Axiome mehr.

Die Definitionen sind zum Teil nur das, was wir heute als Einführung „primitiver Terme" bezeichnen würden. Auf diese Art werden Begriffe wie „Punkt", „Linie", „Gerade" oder „Ebene" erklärt. Euklid schreibt z.B.: „Eine Linie ist *gerade*, wenn sie zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt". Stellenweise findet man aber auch darüber hinausgehende Informationen, wie z. B. die, daß eine „Gerade" bei Euklid immer begrenzt, also in unserem Sprachgebrauch eine „Strecke" ist, und es gibt auch echte Definitionen, etwa die des „Winkels" oder gewisser Polygone. Besonders interessant: „Ist ein Winkel gleich seinem Nebenwinkel, so ist jeder der beiden ein Rechter“. Und wichtig ist auch die letzte Definition:

Zwei gerade Linien (in einer Ebene) werden „parallel“ genannt, wenn sie sich auch nach beliebig weiter Verlängerung niemals treffen. In der deutschen Übersetzung von Clemens Thaer ist an dieser Stelle von einer Verlängerung „ins Unendliche“ die Rede, was nicht ganz korrekt ist, weil der Begriff „Unendlich“ in der griechischen Mathematik nicht verwendet wird. Sir Thomas Heath ist da in seiner englischen Übersetzung sorgfältiger und spricht von „unbeschränkter Verlängerung“. Mehr wird später auch tatsächlich nicht gebraucht.

Es folgen die berühmten fünf **Postulate**:

Gefordert soll sein:

I. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann;

II. Daß man eine berenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann;

III. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann;

IV. Daß alle rechten Winkel einander gleich sind;

V. Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien sich bei unbegrenzter Verlängerung auf der Seite treffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Postulat I führt die Möglichkeit ein, mit einem (unmarkierten) Lineal die Strecke zwischen zwei Punkten zu zeichnen. Die zuvor von Euklid gegebene Definition der „geraden Linie“ legt nahe, daß auch an das Anvisieren eines Punktes von einem anderen Punkt aus gedacht wurde. Eine Forderung nach Eindeutigkeit fehlt hier, aber aus den späteren Beweisen kann man herauslesen, daß Euklid durchaus die eindeutige Verbindbarkeit gemeint hat. Man könnte das auch so deuten, daß hier ein erstes erlaubtes Mittel zum Konstruieren eingeführt wird, die gerade Verbindung zweier Punkte.

Da bei Euklid die Geraden begrenzte Figuren sind, fordert er in Postulat II die Verlängerbarkeit einer Strecke über einen Endpunkt hinaus. Dies scheint mir besonders deutlich auf ein Konstruktionsmittel hinzuweisen. Ein weiteres Indiz dafür ist die Tatsache, daß er an späterer Stelle in den „Elementen“ eine viel stärkere Eigenschaft benutzt, die wir heute als „Axiom des Archimedes“ kennen, und die keineswegs Inhalt eines Postulates ist.

Postulat III führt den Zirkel ein. Erst aus den späteren Beweisen ergibt sich, wie das genau gemeint ist: Ist ein Punkt P und eine bei P angelegte Strecke PQ gegeben, so kann der Kreis um P durch Q gezeichnet werden. Nimmt man den Zirkel weg, muß man ihn zusammenklappen. Er kann also nicht benutzt werden, um Strecken zu übertragen.

Postulat IV ist überraschend. Hier wird ausdrücklich die Eindeutigkeit gefordert, die sonst immer nur stillschweigend vorausgesetzt wird. Auch scheint sich das vierte Postulat von den ersten drei im Abstraktheitsgrad zu unterscheiden. Vielleicht wird hier aber auch nur der rechte Winkel als universelles Eichmaß für Winkel und damit ein weiteres Konstruktionsmittel eingeführt. Dazu muß tatsächlich an jeder gewünschten Stelle ein rechter Winkel zur Verfügung stehen. In Proposition 11 („Errichten einer Senkrechten“) wird zum ersten Mal davon Gebrauch gemacht.

Die Aufstellung von Postulat V gilt als große Leistung Euklids. Es fällt zunächst auf, daß die Formulierung viel komplizierter als bei den anderen Axiomen ist, und der Sachverhalt ist auch nicht unmittelbar einleuchtend, denn der geforderte Schnittpunkt kann so weit entfernt sein, daß man ihn nicht beobachten kann. Insofern scheint Postulat V nicht den Vorstellungen zu entsprechen, die man im Altertum von Axiomen hatte. Ich werde später aber eine Deutung des Parallelenaxioms geben, die dieses wieder in den Bereich der Konstruktionsmethoden rückt.

In den „Elementen“ folgen nun einige „Axiome“, die den Umgang mit der Gleichheit regeln. Heute würden wir von „Kongruenz-Axiomen“ sprechen. Zunächst wird angedeutet, daß die Kongruenz eine Äquivalenzrelation ist. Eigenschaften wie „Reflexivität“ und „Symmetrie“ wurden von Euklid natürlich als selbstverständlich erachtet, die Transitivität fordert er. Dann sagt er, daß Figuren, die sich decken, kongruent sind. In moderner Sprache heißt das, daß es eine Gruppe von bijektiven Abbildungen (nämlich die „Bewegungen“) gibt, mit deren Hilfe man Kongruenz herstellen oder überprüfen kann. Es werden noch weitere Eigenschaften verlangt, eine wesentliche Bedingung fehlt allerdings. Darauf komme ich weiter unten noch zu sprechen.

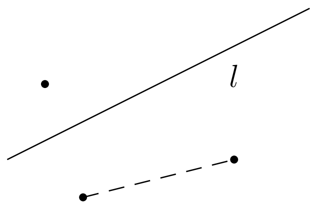
Bei den nun folgenden **Sätzen** fällt auf, daß das Postulat V zum ersten Mal in Proposition 29 verwendet wird. Und schon in Proposition 32 beweist Euklid, daß die Winkelsumme im Dreieck $180°$ beträgt, und legt damit den Grund für die aus der Schule bekannte Euklidische Geometrie.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurden die „Lücken“ in Euklids Axiomensystem thematisiert und nach und nach beseitigt.

- Bei den „Inzidenz-Axiomen“ wurde die Eindeutigkeit eingeführt. Außerdem wurde gefordert, daß es in der Ebene mindestens 3 Punkte gibt. Für Euklid alles Selbstverständlichkeiten.

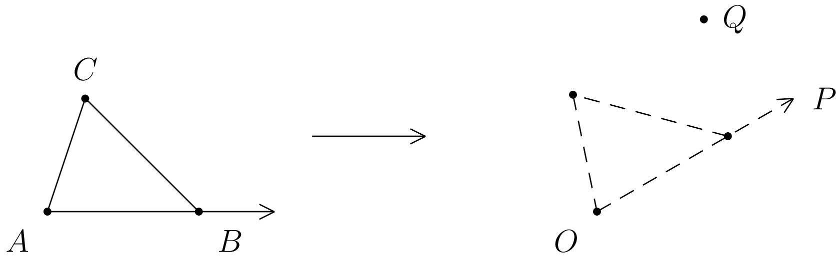
- Es wurde festgestellt, daß es für Punkte auf einer Geraden eine Anordnung gibt. Man kann bei drei Punkten auf einer Geraden stets einen finden, der zwischen den beiden anderen liegt. Das ist z.B. bei Punkten auf einem Großkreis auf einer Kugeloberfläche nicht möglich. Euklid hätte daran denken können, aber andererseits hätte er sicher niemals einen Großkreis als Gerade aufgefaßt.

Eine ernstere Lücke wurde von Moritz Pasch beseitigt. Ursprünglich ging es darum, die Existenz von Schnittpunkten gewisser Linien zu sichern. In sehr elementarer Form kann man das heute so formulieren: Ist l eine Gerade und sind drei verschiedene Punkte außerhalb dieser Geraden gegeben, so müssen zwei von ihnen auf der gleichen Seite von l liegen, in dem Sinne, daß ihre Verbindungsstrecke l nicht trifft.



- Große Schwierigkeiten hatte Euklid mit der „Superposition“, also der Deckungsgleichheit von Figuren. Er konnte sie nicht vermeiden, wandte sie aber sehr zögerlich an. Im Beweis von Proposition 4 (SWS-Kongruenz) sieht man sehr deutlich, daß folgendes Axiom fehlt:

  Sind A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und O, P, Q ebenfalls drei nicht-kollineare Punkte, so gibt es (genau eine) Bewegung, die A auf O abbildet, den Halbstrahl $\overrightarrow{AB}$ auf den Halbstrahl $\overrightarrow{OP}$ und die durch die Gerade AB und den Punkt C bestimmte Halbebene auf die durch OP und Q bestimmte Halbebene.



- Schon in Proposition 1 (Errichten eines gleichseitigen Dreiecks auf einer gegebenen Strecke) benötigt Euklid die Tatsache, daß sich zwei Kreise (deren Mittelpunkte um weniger als die Summe ihrer Radien voneinander entfernt sind) sich in zwei Punkten schneiden. Das ist natürlich unzulässig. Entweder hätte er diese Tatsache als Axiom fordern müssen, oder er hätte ein sogenanntes „Stetigkeitsaxiom“ einführen müssen. Welche Konsequenzen sich aus einem Kreisaxiom ergeben, werde ich im folgenden Abschnitt untersuchen. In modernen Axiomensystemen verzichtet man auf das Kreisaxiom, weil der Kreis eine zu komplizierte Figur ist. Mit Hilfe eines geeigneten Stetigkeitsaxioms (etwa im Sinnes des Dedekindschen Vollständigkeits-Axioms für die reellen Zahlen) erhält man auch automatisch die reelle Ebene als typisches Modell für die Euklidische Geometrie.

Kapitel 2 Pythagoräische und platonische Zahlen

Schaut man in Hilberts „Grundlagen der Geometrie" nach, so stellt man fest, daß er mit Hilfe von Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiomen schon einen großen Teil der Sätze Euklids (vor Proposition 29) herleiten kann. Brauchen wir also – abgesehen von Postulat V – gar kein weiteres Axiom?

Ganz so einfach ist es nicht. Da gibt es nämlich bei Euklid
Proposition 22:

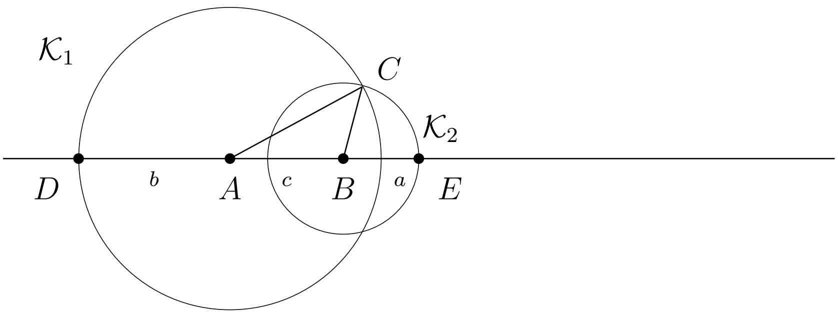
Aus drei gegebenen Strecken a, b, c mit

$$a + b > c, \quad a + c > b \quad \text{und} \quad b + c > a$$

kann ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruiert werden.

Die Beweisidee ist die folgende:

Man ordnet die Strecken in der Reihenfolge b, c, a auf einer Geraden an, so daß Punkte D, A, B, E entstehen. Dann zeichnet man den Kreis $\mathcal{K}_1$ um A mit Radius $b = \overline{DA}$ und den Kreis $\mathcal{K}_2$ um B mit Radius $a = \overline{BE}$. Wählt man einen Schnittpunkt C der beiden Kreise aus, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.



Für Euklid ist der Satz kein Problem, die Methode der zwei Kreise hat er ja schon häufig angewandt. Bei Hilbert sucht man den Satz vergeblich. Woran liegt das?

Seine bisherigen Axiome reichen eben doch noch nicht aus! Um das zu sehen, konstruieren wir ein Modell für die Ebene:

Ausgangspunkt ist die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, zu Ehren der von den Pythagoräern gelehrten Harmonie der Zahlen. Nun gibt es aber auch irrationale Längen, die z.B. als Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Katheten auftreten können. Normiert man eine Kathete zu 1 und hat die zweite Kathete die Länge ω, so hat die Hypotenuse die Länge $\sqrt{1+\omega^2}$. Solche Zahlen müssen also auch zugelassen werden.

Definition. Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *pythagoräisch*, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{1+\omega_i^2})$ mit $\omega_i \in K_{i-1}$ gibt, so daß x in K_n liegt.

Mit $\text{Pyth}(\mathbb{Q})$ bezeichnet man die Menge aller pythagoräischen Zahlen.

$\text{Pyth}(\mathbb{Q})$ ist ein Körper, und $\mathcal{E} := \text{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \text{Pyth}(\mathbb{Q})$ ist ein Modell für die Ebene, das alle bisherigen Axiome erfüllt. Die Geraden sind die Mengen der Gestalt

$$g = \{(x,y) \in \mathcal{E} \mid ax+by=r\}, \quad a,b,r \in \text{Pyth}(\mathbb{Q}), \quad (a,b) \neq (0,0),$$

Schnittpunkte von Geraden erhält man über rein rationale Operationen, und die Bewegungen kann man direkt hinschreiben:

$(x,y) \mapsto (x+a, y+b)$ ergibt eine Translation um (a,b),

$(x,y) \mapsto (x,-y)$ ist die Spiegelung an der x-Achse

und

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(ax-by, bx+ay)$$

liefert eine Drehung um den Nullpunkt $O := (0,0)$, die $E := (1,0)$ auf einen Punkt P auf dem Strahl durch O und $C := (a,b)$ abbildet.

Da $\sqrt{a^2+b^2} = b\sqrt{1+(\frac{a}{b})^2}$ ist, spielt sich alles im Körper der pythagoräischen Zahlen ab. Aus den hier angegebenen Abbildungen kann man alle Bewegungen kombinieren, die nötig sind, um die Bewegungs-Axiome zu erfüllen.

Wie steht es aber mit den Schnittpunkten von Kreisen?

Dazu betrachten wir allgemeine Wurzel-Ausdrücke der Form

$$q = q_n(\sqrt{q_{n-1}(\sqrt{\ldots\sqrt{q_1(\sqrt{\alpha})\ldots}})}),$$

mit rationalen Funktionen $q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n$ und einer Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$. Tauscht man eine oder mehrere der Wurzeln gegen ihr Negatives, so erhält man einen sogenannten *konjugierten* Ausdruck zu q.

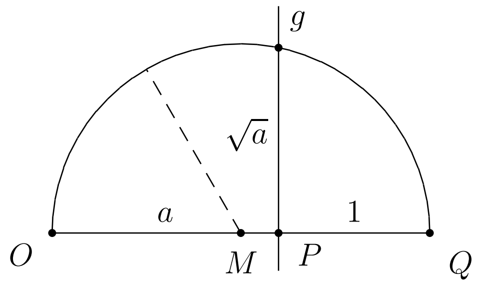
Ist das Argument jeder Wurzel von der Form $1+\omega^2$ (wobei ω wieder ein zusammengesetzter Ausdruck sein kann), so sind der ursprüngliche Ausdruck und alle dazu konjugierten Ausdrücke reelle Zahlen. Sind die Argumente der Wurzeln dagegen von beliebiger Form, so können auch nicht-reelle komplexe Zahlen entstehen.

Ein Beispiel ist etwa der reelle Ausdruck $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$. Der dazu konjugierte Ausdruck $\sqrt{2(-\sqrt{2}-1)} = \mathrm{i}\cdot\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$ ist tatsächlich rein imaginär. Das bedeutet, daß $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ nicht pythagoräisch sein kann!

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist pythagoräisch, also auch $2(\sqrt{2}-1)$, aber eben leider nicht die Wurzel daraus.

Ist a irgendeine pythagoräische Zahl, so liegen die Punkte $O := (0,0)$, $P := (a,0)$ und $Q := (a+1,0)$ in der pythagoräischen Ebene $\mathcal{E} = \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$.

Sei $M := (\frac{a+1}{2}, 0)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OQ}$ und $\mathcal{K}$ der Kreis um M mit Radius $\overline{OM}$.



Schneidet man $\mathcal{K}$ mit der Geraden $g := \{(x,y) \in \mathcal{E} \mid x = a\}$, so erhält man Punkte (x,y) mit $x = a$ und

$$(x - \frac{a+1}{2})^2 + y^2 = (\frac{a+1}{2})^2,$$

also $y^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2 = a$, also $X_\pm := (a, \pm\sqrt{a})$. Würden alle Schnittpunkte von Kreisen in $\mathcal{E}$ existieren, so wäre jeder solche Punkt konstruierbar, aber im Falle $a = 2(\sqrt{2}-1)$ haben wir schon gesehen, daß $\sqrt{a}$ nicht pythagoräisch ist.

Definition. Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *platonisch*, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ mit $\alpha_i \in K_{i-1}$ und $\alpha_i > 0$ gibt, so daß x in K_n liegt.

Mit $\mathrm{Plat}(\mathbb{Q})$ bezeichnet man die Menge aller platonischen Zahlen.

Wenn wir als Modell die kartesische Ebene der platonischen Zahlen

$$\mathcal{E}_0 := \mathrm{Plat}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Plat}(\mathbb{Q})$$

benutzen, so ist klar, daß auch hier die Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome gelten. Und da mit jeder positiven platonischen Zahl auch deren Wurzel wieder platonisch ist, sind die Schnittpunkte von Kreisen immer konstruierbar.

Die Platonische Ebene ist das Modell für die Geometrie, in der alle Konstruktionen allein mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden können, also für die Geometrie, die Euklid betrieben hat. Auch in dieser Ebene gibt es noch viele Lücken, insbesondere ist die Zahl π keine platonische Zahl. Deshalb konnte den Alten auch die Quadratur des Kreises nicht gelingen.

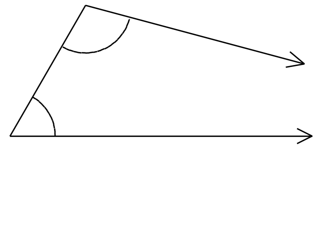
Bei Hilbert findet sich stattdessen die Gruppe der Stetigkeitsaxiome, bestehend aus dem Archimedes-Axiom (das man auf jeden Fall braucht) und einem Vollständigkeitsaxiom, das dem Dedekindschen Axiom entspricht. Damit ist die Platonische Ebene aber kein gültiges Modell mehr, sie muß durch die reelle Ebene ersetzt werden. In dieser sind dann natürlich alle Konstruktionen ausführbar, aber es besteht auch nicht mehr die Einschränkung auf Zirkel und Lineal.

Kapitel 3 WSW-Kongruenz und Parallelenaxiom

Wie versprochen, möchte ich nun den konstruktiven Aspekt von Postulat V erläutern. In den Sätzen 4 (SWS), 8 (SSS) und 26 (WSW und WWS) stellt Euklid die entscheidenden Kongruenzsätze zur Verfügung. Wenn es ihm aber doch um das Konstruieren mit Zirkel und Lineal ging, so stellt sich die Frage, ob er auch Dreiecke aus drei gegebenen Stücken konstruiert, eben aus SWS, SSS, WSW oder WWS.

Im Falle SWS ist die Konstruktion trivial, man braucht nur die Endpunkte der freien Schenkel zu verbinden. Im Falle SSS müssen die gegebenen Seiten natürlich die Dreiecksungleichung erfüllen. Ist das der Fall, so wird die Konstruktion angegeben, unter Benutzung der Schnittpunkte zweier Kreise.

Aber die Dreieckskonstruktion WSW kann Euklid nach Proposition 26 noch nicht durchführen. Er weiß, nach Proposition 17, daß die beiden gegebenen Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sein müssen. Es kann aber sein, daß die beiden freien Schenkel fast parallel verlaufen, und dann ist ein Schnittpunkt in erreichbarer Entfernung nicht aufzufinden. Deshalb wird hier Postulat V gebraucht, das die Existenz des gesuchten Schnittpunktes sichert, und es erklärt sich auch die seltsame Formulierung des Postulates. Die Bedeutung dieser Dreieckskonstruktion, die ja in der Geodäsie eine wichtige Rolle spielt, wird bei Euklid nicht so offenbar, weil er mit Hilfe des Parallelenaxioms sehr schnell den Satz von der Winkelsumme im Dreieck beweisen kann und damit ein mächtiges Instrument für alle weiteren Untersuchungen besitzt.



Kapitel 4 Die lange Suche nach den Parallelen

Von Anfang an gab es Zweifel, ob es sich bei Postulat V wirklich um ein Axiom handelte, oder ob nicht vielmehr Euklid es nur nicht geschafft habe, die Aussage zu beweisen. Für diese Theorie sprach unter anderem, daß Euklid selbst zögert, das Postulat anzuwenden. Er benutzt es zum ersten Mal in Proposition 29 und beweist vorher etliche Sätze mit großer Mühe, die mit Hilfe von Postulat V fast trivial wären. Ein weiteres Indiz für die Beweisbarkeit scheint die Tatsache zu sein, daß die Umkehrung ein Satz ist:

> PROPOSITION 17: *In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte.*

Das kann man auch so formulieren:

> *Wenn zwei sich schneidende Geraden von einer dritten getroffen werden, so bildet die schneidende mit den beiden anderen auf einer Seite innere Winkel, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.*

Die Bezeichnung „Parallelenpostulat“ für Postulat V rührt bekanntlich daher, daß seine Gültigkeit äquivalent zur **Eindeutigkeit** der Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt ist. Die Existenz einer solchen Geraden wird von Euklid schon in Proposition 31 (ohne Postulat V) bewiesen.

Erste Beweisversuche gab es schon in der Antike, **Posidonius** (ca. 135 - 50 v.Chr.), **Claudius Ptolemäus** (ca. 85 - 165 n.Chr.) und **Proklos Diadochos** (ca. 410 - 485 n.Chr.) sind da zu erwähnen. Häufig wurde dabei „parallel“ durch „äquidistant“ ersetzt. Die beiden Begriffe sind aber nur dann äquivalent, wenn das Parallelenaxiom gilt.

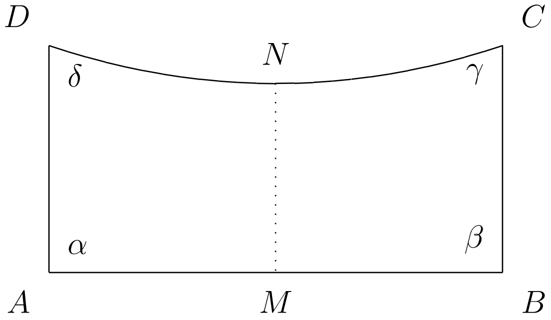
Im Jahre 622 floh Mohammed von Mekka nach Medina und begründete den Islam. Bereits 641 eroberten die Araber die Stadt Alexandria und vernichteten all das an Kulturgut, was nicht schon zuvor den Christen zum Opfer gefallen war. Zwischen 750 und 850 n.Chr. beginnt die Geschichte der Mathematik bei den Arabern.

Die Wissenschaftler **Omar al-Hayyam** (ca. 1050 - 1130, vor allem als Lyriker bekannt) und **Nasir ad-Din at-Tusi** (1201 - 1274, zeitweise Hofastronom des Bruders von Kublai Khan) machten erste Fortschritte beim Parallelen-Problem. Sie stellten die Verbindung zwischen dem Parallelenaxiom und dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck her. Außerdem untersuchten sie eine bestimmte Klasse von Vierecken und stellten die berühmten drei Hypothesen auf.

Der italienische Jesuit **Girolamo Saccheri** (1667 - 1733), nach dem die oben genannten Vierecke später benannt wurden, griff die Untersuchungen der Araber auf.

Unter einem *Saccheri-Viereck* versteht man ein Viereck $ABCD$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Bei A und B liegen jeweils rechte Winkel vor.
2. Die Seiten AD und BC sind gleich lang.



Satz von den drei Hypothesen:

1. Ist $\delta < 90°$, so ist $DC > AB$.
2. Ist $\delta = 90°$, so ist $DC = AB$.
3. Ist $\delta > 90°$, so ist $DC < AB$.

Diese Aussage kann natürlich ohne Parallelenaxiom bewiesen werden. Man kann außerdem zeigen, daß in jedem Saccheri-Viereck die „Gipfelwinkel“ δ und γ gleich sind. In der Euklidischen Geometrie, also bei Gültigkeit des Parallelenaxioms, ist natürlich jedes Saccheri-Viereck ein Rechteck. Sind die Gipfelwinkel spitz, rechte Winkel oder stumpf, so sagt man, die Hypothese vom spitzen, rechten oder stumpfen Winkel sei erfüllt. Schon die Araber wußten, daß die Gültigkeit der Hypothese vom rechten Winkel äquivalent zur Gültigkeit von Postulat V ist.

Saccheri versuchte nun, durch Widerspruch die Hypothesen vom spitzen und vom stumpfen Winkel auszuschließen. Tatsächlich gelang ihm das beim stumpfen Winkel. Eine solche Hypothese ist übrigens z.B. bei der sphärischen Geometrie erfüllt, allerdings gelten dort auch andere Axiome von Euklid nicht.

Angespornt durch seinen Erfolg, versuchte Saccheri dann, auch die Hypothese vom spitzen Winkel zu Fall zu bringen. Er konnte aber nur zeigen, daß eine solche Hypothese die Existenz von Parallelen zur Folge hätte, die asymptotisch aufeinander zulaufen. Da er so etwas für unnatürlich hielt, argumentierte er philosophisch weiter und sah das Parallelenaxiom als bewiesen an.

Fast 100 Jahre später lebte der französische Mathematiker **Legendre**. Er entdeckte die Ergebnisse von Saccheri neu, fand übersichtlichere Beweise und scheiterte letztlich auch an der Hypothese vom spitzen Winkel. Viele andere versuchten sich daran, unter anderem einer der Lehrer von Gauß, der Göttinger Professor **Abraham Gotthelf Kästner** (1719 - 1800), Kästners Schüler **Georg Simon Klügel**, und der Schweizer Mathematiker **Johann Heinrich Lambert**. Der Philosoph **Immanuel Kant** (1724 - 1804) zementierte durch seine Auffassung von mathematischer Gewißheit die allgemeine Meinung, daß an den Axiomen von Euklid nicht zu rütteln sei.

Und dann wendete sich das Blatt. **Carl Friedrich Gauß** (1777 - 1855) hatte sich seit 1792 mit der Theorie der Parallellinien beschäftigt. Allerdings wurden seine Ergebnisse erst später auf indirektem Wege über seine Briefe bekannt, veröffentlicht hat er nie etwas zu diesem Thema. Er war wohl der Meinung, es entspräche nicht dem Zeitgeist, obwohl er schon um 1816/17 klare Vorstellungen von der Geometrie unter der Hypothese vom spitzen Winkel hatte.

Im Jahre 1832 schickte ihm sein Jugendfreund, der Ungar Wolfgang Bolyai, eine Arbeit seines Sohnes **Johann Bolyai** (1802 - 1860), in der dieser unter der Hypothese vom spitzen Winkel eine vollständige Theorie der asymptotischen Parallelen entwickelte. Er arbeitete mit räumlicher Geometrie, führte sogenannte korrespondierende Punkte auf asymptotischen Parallelen und mit deren Hilfe die „Parasphäre“ ein, auf der er die Euklidische Geometrie wiederentdeckte. Das sah er als Beweis für die Widerspruchsfreiheit seiner Theorie an.

Gauß äußerte sich positiv über die Arbeit, gab aber zu verstehen, daß sie in weiten Teilen seinen eigenen Überlegungen entspräche. Das führte zu einem heftigen Zerwürfnis mit seinem Freund und dessen Sohn. Johann Bolyai wurde völlig aus der Bahn geworfen, Jahre später starb er völlig verarmt und vergessen.

Schließlich erschien 1840 in Berlin die deutsche Übersetzung einer Arbeit des Russen **Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski** (1793 - 1856) zum gleichen Thema, die schon zwischen 1826 und 1835 entstanden war. Auch Lobatschewski entdeckte die Parasphäre, bezeichnete sie aber als „Horosphäre“. Gauß äußerte sich sehr positiv über diese Arbeit, wiederum aber nur in Briefen.

Die drei Mathematiker Gauß, Bolyai und Lobatschewski scheinen tatsächlich unabhängig voneinander die Nichteuklidische Geometrie entdeckt zu haben, die Zeit war einfach reif dafür. Allerdings dauerte es noch etliche Jahre, bis die ersten Modelle (von Cayley-Klein-Beltrami und von Poincaré) erschienen und dadurch die Existenz der Theorie bewiesen wurde.