

3. Teil: Symmetrien

In Physikbüchern wird eine *Liegruppe* beschrieben als eine Gruppe G , deren Elemente von n Parametern abhängen: $g = g(a_1, \dots, a_n)$.

Ist $g_1 = g_1(a_1, \dots, a_n)$, $g_2 = g_2(b_1, \dots, b_n)$ und $g = g_1 g_2$, so ist $g = g(c_1, \dots, c_n)$, mit analytischen (?) Funktionen $c_i = c_i(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$, für $i = 1, \dots, n$. Analog wird die Inversenbildung beschrieben. Komplizierter geht's kaum, und zudem ist es irreführend. Denn im allgemeinen lässt sich eine Liegruppe nicht parametrisieren, das gilt höchstens – wie wir aus Kapitel 2, §1, wissen – für eine Umgebung des neutralen Elements.

Da meist davon gesprochen wird, dass $e = e(0, \dots, 0)$ sein soll, kann man annehmen, dass mit der Parametrisierung wohl die Exponentialabbildung gemeint ist. Ganz sicher ist das aber nicht.

Beispiele.

1. Die Elemente von $SO(2)$ sind die Drehmatrizen $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, parametrisiert durch $t \in \mathbb{R}$.
2. Die Gruppe $SO(3)$ wird durch die Eulerschen Winkel parametrisiert. Für $O(3) = SO(3) \times \mathbb{Z}_2$ wird als 4. Parameter die Determinante ± 1 genannt.
3. Die Elemente von $SU(2)$ sind die Matrizen

$$U(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) := \exp \left(i \sum_{\nu=1}^3 \varepsilon_\nu \sigma_\nu \right),$$

wobei die σ_ν die Pauli-Matrizen sind.

Symmetrien von physikalischen Systemen werden durch Darstellungen von Liegruppen auf dem Hilbertraum der Zustände beschrieben. Da jede Darstellung einer kompakten Liegruppe äquivalent zu einer unitären Darstellung ist, beschränkt man sich weitgehend auf Untergruppen von unitären Gruppen.

Die irreduziblen Unterräume des Hilbertraums sind endlich-dimensional (vgl. Satz von Peter und Weyl, Anhang E.7). Nach dem Satz von Stone (Anhang E.12) kann jede (stark stetige) einparametrische Schar $U(t)$ von unitären Operatoren in der Form $U(t) = e^{itA}$ geschrieben werden, mit einem selbstadjungierten Operator A , also einer Observablen. Man kann dann allgemein für Elemente der Gruppe G schreiben:

$$g(a_1, \dots, a_n) = \exp \left(\sum_{\nu=1}^n i a_\nu X_\nu \right),$$

mit $X_\nu := -i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(0, \dots, h, \dots, 0) - g(0, \dots, 0)) = -i \frac{\partial g}{\partial a_\nu} \Big|_{\mathbf{a}=0}$. Am Beispiel der Gruppe $SU(2)$ wurde das oben schon demonstriert.

Die Elemente X_ν werden als *Generatoren* der Gruppe bezeichnet. Es handelt sich dabei nicht um Erzeugende der Liealgebra von G , das wären vielmehr die Elemente $i X_\nu$. Das ist eine Quelle für viele Mißverständnisse. Ist eine Basis $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ der Liealgebra gegeben, so gibt es eine Beziehung

$$[Y_i, Y_j] = \sum_k c_{ij}^k Y_k.$$

Die Koeffizienten c_{ij}^k nennt man die *Strukturkonstanten* der Liealgebra. In der physikalischen Version schreibt man:

$$[X_i, X_j] = i \sum_k C_{ij}^k X_k.$$

Preisfrage: Welche Beziehung besteht zwischen c_{ij}^k und C_{ij}^k ?

Casimir-Operatoren:

Sei L eine (abstrakte) Liealgebra mit Basis $\{Y_1, \dots, Y_n\}$, T die Tensoralgebra von L und $J \subset T$ das zweiseitige Ideal, das von den Elementen $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ (mit $x, y \in L$) erzeugt wird. Dann nennt man $\mathcal{U} = \mathcal{U}(L) := T/J$ die *universelle einhüllende Algebra* von L . Diese Algebra ist assoziativ, und es gibt eine kanonische lineare Abbildung $i_L : L \rightarrow \mathcal{U}$, so dass gilt:

1. $i_L([x, y]) := i_L(x)i_L(y) - i_L(y)i_L(x)$ für $x, y \in L$.
2. i_L ist injektiv.
3. \mathcal{U} wird von 1 und den Produkten $i_L(Y_{i_1}) \cdots i_L(Y_{i_k})$, $i_1 \leq \dots \leq i_k$, erzeugt.
4. Ist A eine assoziative Algebra mit 1 und $j : L \rightarrow \mathcal{U}$ eine lineare Abbildung mit $j([x, y]) = j(x)j(y) - j(y)j(x)$, so gibt es genau einen Algebra-Homomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow A$ mit $\varphi \circ i_L = j$.

Man kann also jede Liealgebra als Unter algebra einer assoziativen Algebra auffassen, so dass dabei das Liesche Klammerprodukt zum gewöhnlichen Kommutator wird. Der Beweis ist nicht trivial, es handelt sich um das fundamentale Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorem. Man kann die einhüllende Algebra mit der Algebra der linksinvarianten Differentialoperatoren identifizieren.

Definition.

Sei $\varrho : L \rightarrow \text{End}(V)$ eine treue Darstellung, $\beta : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\beta(x, y) := \text{Spur}(\varrho(x) \circ \varrho(y))$. Es sei vorausgesetzt, dass β nicht entartet ist, sowie $\{Y_1^*, \dots, Y_n^*\}$ die „reziproke Basis“ mit $\beta(Y_\nu, Y_\mu^*) = \delta_{\nu\mu}$. Dann heißt $c_\varrho := \sum_\nu \varrho(Y_\nu) \circ \varrho(Y_\nu^*)$ das *Casimir-Element* von ϱ .

Für Elemente $f, g, h \in \text{End}(V)$ ist

$$[f, gh] = fgh - ghf = (fg)h - (gf)h + g(fh) - g(hf) = [f, g]h + g[h, f].$$

Für Elemente $x, y, z \in L$ ist

$$\begin{aligned}\beta([x, y], z) &= \text{Spur}(\varrho(x)\varrho(y)\varrho(z)) - \text{Spur}(\varrho(y)\varrho(x)\varrho(z)) \\ &= \text{Spur}(\varrho(x)\varrho(y)\varrho(z)) - \text{Spur}(\varrho(x)\varrho(z)\varrho(y)) \\ &= \beta(x, [y, z]).\end{aligned}$$

Also gilt für $x \in L$ mit $[x, Y_\nu] = \sum_\mu a_{\nu\mu} Y_\mu$ und $[x, Y_\nu^*] = \sum_\mu b_{\nu\mu} Y_\mu^*$:

$$\begin{aligned}a_{\nu\lambda} &= \sum_\mu a_{\nu\mu} \beta(Y_\mu, Y_\lambda^*) = \beta([x, Y_\nu], Y_\lambda^*) \\ &= -\beta([Y_\nu, x], Y_\lambda^*) = -\beta(Y_\nu, [x, Y_\lambda^*]) \\ &= -\sum_\mu b_{\lambda\mu} \beta(Y_\nu, Y_\mu^*) = -b_{\lambda\nu}.\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}[\varrho(x), c_\varrho] &= \sum_\nu [\varrho(x), \varrho(Y_\nu)\varrho(Y_\nu^*)] \\ &= \sum_\nu [\varrho(x), \varrho(Y_\nu)]\varrho(Y_\nu^*) + \sum_\nu \varrho(Y_\nu)[\varrho(x), \varrho(Y_\nu^*)] \\ &= \sum_{\nu,\mu} a_{\nu\mu} \varrho(Y_\mu)\varrho(Y_\nu^*) - \sum_{\nu,\mu} b_{\nu\mu} \varrho(Y_\nu)\varrho(Y_\mu^*) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Das Casimir-Element von ϱ ist also mit allen Elementen von $\varrho(L)$ vertauschbar. Außerdem kann man zeigen, dass es unabhängig von der Basis ist. Ist ϱ irreduzibel, so folgt aus dem Schurschen Lemma, dass c_ϱ ein Skalar ist.

Ist $\varrho = \text{ad}$ die adjungierte Darstellung einer Liealgebra \mathfrak{g} , so ist β die Killing-Form. Im Falle einer halbeinfachen Liealgebra ist diese nicht entartet.

Häufig wird jedes Element aus dem Zentrum der einhüllenden Algebra \mathcal{U} als *Casimir-Operator* bezeichnet. Ist $S(L) = \bigoplus_q S^q(L)$ die symmetrische Tensoralgebra von L , so gibt es einen Vektorraumisomorphismus $\omega : S(L) \rightarrow \mathcal{U}(L)$ mit folgender Eigenschaft:

Ist $\tilde{\omega}_q : L \times \cdots \times L \rightarrow \mathcal{U}(L)$ die symmetrische q -fach multilineare Abbildung

$$\tilde{\omega}_q : (x_1, \dots, x_q) \mapsto \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} i_L(x_{\sigma(1)}) \cdots i_L(x_{\sigma(q)}),$$

so gibt es genau eine lineare Abbildung $\omega_q : S^q(L) \rightarrow \mathcal{U}(L)$ mit

$$\omega_q(x_1 \otimes \cdots \otimes x_q) = \tilde{\omega}_q(x_1, \dots, x_q),$$

und für $T \in S^q(S)$ ist $\omega(T) = \omega_q(T)$.

Jedes Element $x \in L$ operiert auf $\mathcal{U}(L)$ durch die adjungierte Darstellung:

$$(\text{ad } x)u := [x, u] = xu - ux, \text{ für } u \in \mathcal{U}(L).$$

$\text{ad } x$ ist eine Derivation, ad ist eine Darstellung von L in $\mathcal{U}(L)$. Der Vektorraum $\mathcal{U}(L)^L = \{u \in \mathcal{U}(L) : (\text{ad } x)u = 0 \ \forall x \in L\}$ der invarianten Elemente stimmt mit dem Zentrum $Z(\mathcal{U}(L))$ überein. Andererseits kann die adjungierte Darstellung $\text{ad} : L \rightarrow \text{End}(L)$ zu einer Derivation der symmetrischen Algebra $S(L)$ fortgesetzt werden. Dann induziert ω einen Vektorraum-Isomorphismus $\omega : S(L)^L \rightarrow Z(\mathcal{U}(L))$, was eine neue Beschreibung der Casimir-Operatoren liefert. Der Raum dieser Operatoren ist isomorph zum Raum der (rechts- und links-)invarianten Differentialoperatoren. Ist $L = L(G)$, so kann man zeigen, dass $\dim Z(\mathcal{U}(L)) = \text{rg}(G)$ ist. Insbesondere gibt es für $SU(2)$ und $SO(3)$ bis auf Vielfache genau einen Casimir-Operator (eben das Casimir-Element zur adjungierten Darstellung).

Die Pauli-Matrizen σ_ν stellen Generatoren der $SU(2)$ dar. Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 \text{ und } \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2.$$

Es handelt sich also um verallgemeinerte Drehimpuls-Operatoren J_1, J_2, J_3 , und $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ ist der Casimir-Operator.

Generatoren für $SO(3)$ sind die Matrizen

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } L_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auch sie erfüllen die Vertauschungsrelationen verallgemeinerter Drehimpulsoperatoren, $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ ist der Casimir-Operator.

Multipletts:

Wird eine physikalische Symmetrie durch die Darstellung einer Liegruppe G auf dem Hilbertraum der Zustände beschrieben, so versteht man unter einem *Multiplet* einen irreduziblen invarianten Unterraum bezüglich dieser Darstellung.

Ist G halbeinfach, so besagt ein Satz von Racah: Ist $\text{rg}(G) = r$ und $\{L_1, \dots, L_n\}$ ein System von (linear unabhängigen) Generatoren, so gibt es r linear unabhängige Casimir-Operatoren $C_\varrho(L_1, \dots, L_n)$, $\varrho = 2, 3, \dots, r+1$, deren Eigenwerte c_2, \dots, c_{r+1} (über die zugehörigen Eigenräume) die Multipletts bestimmen. Denn weil die Casimir-Operatoren mit allen Symmetrien vertauschen, stellen ihre Eigenräume invariante irreduzible Unterräume dar.

Symmetrien und Erhaltungssätze:

Jeder Erhaltungssatz für ein quantenmechanisches System liefert die Invarianz des zugehörigen Hamilton-Operators unter einer geeigneten Symmetriegruppe. Die Umkehrung gilt nicht allgemein (z.B. entspricht die Invarianz unter der antiunitären Zeitumkehr keinem Erhaltungssatz), wohl aber bei unitären Gruppen.

Sei $U(t) = e^{itA}$ eine unitäre Transformation. Dass der Hamilton-Operator H invariant unter $U(t)$ ist, bedeutet:

$$U(t) \cdot H \cdot U(t)^{-1} = H \quad (\text{oder: } [H, U(t)] = 0).$$

Ist φ Eigenfunktion von H mit (Energie-)Eigenwert E , also $H\varphi = E\varphi$, und setzt man $H' := U(t)HU(t)^{-1}$ und $\varphi' := U(t)\varphi$, so ist auch $H'\varphi' = E\varphi'$. Ist H invariant, also $H' = H$, so folgt: φ' ist ebenfalls Eigenfunktion zum Eigenwert E . Unter einem *Multipllett* versteht man manchmal auch eine ON-Basis eines irreduziblen Eigenraumes des Hamilton-Operators zu einem festen Energiewert.

Wir betrachten jetzt Beispiele von Symmetrien. Dabei sei hier schon angemerkt, dass es exakte (also immer gültige) Symmetrien gibt, wie z.B. die durch das Gesetz von der Ladungserhaltung bestimmte Symmetrie. Andere Symmetrien gelten nur „näherungsweise“. So ist z.B. der Isospin invariant unter der starken Wechselwirkung, aber nicht unter der elektromagnetischen Wechselwirkung.

1. Die Symmetrie unter gewissen Lorentz-Transformationen entspricht z.B. der Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors oder des räumlichen Drehmoments.
2. Die Symmetrie unter geeigneten „Eichtransformationen“ liefert die Erhaltung der Ladung Q , der Baryonenzahl B bzw. der Leptonenzahlen L_e und L_μ .
3. Das Spin-Statistik-Theorem gibt Auskunft über das Verhalten von Systemen identischer Teilchen unter Permutationen (Symmetrie bei ganzzahligem Spin, Antisymmetrie bei halbzahligem Spin).
4. Die *Raumspiegelung* P entspricht der Erhaltung der *Parität*. Sie gilt nur näherungsweise. Das gleiche gilt bei der *Ladungskonjugation* C , die ein Teilchen in sein Antiteilchen überführt. Sie entspricht der Erhaltung der *C-Parität*. Zur Zeitumkehr gibt es keinen Erhaltungssatz. Ein berühmter Satz von Streater-Wightman besagt: Die Kombination *CPT* ist eine exakte Symmetrie.
5. Die Isospin-Symmetrie ist – wie oben schon erwähnt – nicht exakt. Bei den Elementen eines Multipletts denkt man daher nicht an verschiedene Zustände eines Teilchens, sondern an verschiedene Teilchen (hier speziell an Proton und Neutron). Der *Isospin* $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$ bleibt erhalten bei „Rotation“ im Isospin-Raum, d.h. bei Wirkung von $SU(2)$. Diese Invarianz gilt nur bei starker Wechselwirkung und wird gebrochen durch elektromagnetische Wechselwirkung.
6. Für die Ladung Q gilt die Gleichung

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y.$$

Dabei ist Y die „Hyperladung“.

7. Der *Spin* $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ liefert genau wie der Bahndrehimpuls einen Anteil vom Gesamtdrehimpuls. Die Komponenten verhalten sich wie die eines verallgemeinerten Drehimpulsoperators. Die Eigenwerte des Casimir-Operators $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ nehmen die $2s + 1$ Werte $s, s - 1, \dots, -s$ an. Dabei ist s eine ganze Zahl oder eine Halb-Zahl. Ist $s = 1/2$, so kann man \mathbf{S} mit Hilfe der Pauli-Matrizen beschreiben:

Für Systeme mit identischen Teilchen führt man im Rahmen der „zweiten Quantisierung“ Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a_j^+ und a_j^- ein. Es gelten die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} a_j^- a_k^+ - a_k^+ a_j^- &= \delta_{jk} \quad (\text{im Falle von Bosonen}) \\ \text{und } a_j^- a_k^+ + a_k^+ a_j^- &= \delta_{jk} \quad (\text{im Falle von Fermionen}). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet der Index jeweils einen bestimmten Quantenzustand des Teilchens.

Es gibt auch Gruppen von Teilchen, deren Mitglieder als verschiedene verallgemeinerte Quantenzustände aufgefasst werden können. Etwa im Falle der Nukleonen gibt es die Zustände p (Proton) und n (Neutron).

Der Übergang von einem Zustand der Sorte k zum Zustand j wird durch den Operator $T_{jk} := a_j^+ a_k^-$ beschrieben. Bedeuten die Zustände Teilchen einer gewissen Sorte, so wird ein Teilchen der Sorte k vernichtet und ein Teilchen der Sorte j erzeugt. Es gilt:

$$\begin{aligned} [T_{jk}, T_{rs}] &= T_{jk} T_{rs} - T_{rs} T_{jk} \\ &= a_j^+ a_k^- a_r^+ a_s^- - a_r^+ a_s^- a_j^+ a_k^- \\ &= a_j^+ (\pm a_r^+ a_k^- + \delta_{kr}) a_s^- - a_r^+ (\pm a_j^+ a_s^- + \delta_{sj}) a_k^- \\ &= a_j^+ a_s^- \delta_{kr} - a_r^+ a_k^- \delta_{sj}, \end{aligned}$$

denn es ist $a_j^+ a_r^+ = a_r^+ a_j^+$ und $a_k^- a_s^- = a_s^- a_k^-$. Das Ergebnis gilt für Bosonen und Fermionen.

Gibt es d verschiedene Teilchensorten, so gibt es d^2 Operatoren T_{jk} . Wir betrachten den Operator

$$N := \sum_{i=1}^d a_i^+ a_i^-.$$

Er setzt sich zusammen aus den Operatoren $N_i := a_i^+ a_i^-$, die man auch als *Besetzungszahl-Operatoren* bezeichnet. Bei Fermionen sind alle Zustände, in denen ein Teilchen der Sorte i vorkommt, Eigenvektoren von N_i zum Eigenwert 1,

die anderen Eigenvektoren zum Eigenwert 0. Hier zeigt sich das Pauli-Prinzip. Bei Bosonen ist ein Zustand, der n Teilchen der Sorte i umfasst, ein Eigenvektor von N_i zum Eigenwert n . Also liefert N in jedem Zustand die Gesamt-Teilchenzahl. Man kann N als konstante ganze Zahl (multipliziert mit der Identität) auffassen.

Für $j \neq k$ ist offensichtlich

$$\begin{aligned} [T_{jk}, N] &= \sum_{i=1}^d [T_{jk}, T_{ii}] \\ &= \sum_{i=1}^d (a_j^+ a_i^- \delta_{ki} - a_i^+ a_k^- \delta_{ij}) \\ &= a_j^+ a_k^- a_j^+ a_k^- = 0. \end{aligned}$$

Das korrespondiert mit der Tatsache, dass die Vertauschungsoperatoren T_{jk} die Gesamt-Teilchenzahl nicht verändern. Die Zahl der unabhängigen Operatoren T_{jk} reduziert sich auf $d^2 - 1$.

Betrachtet man ein Nukleon (also ein einzelnes Teilchen) mit den zwei möglichen Zuständen p und n , so gilt:

$$a_p^+ a_p^- + a_n^+ a_n^- = \text{id}.$$

Da es sich um Teilchen mit Spin $1/2$, also Fermionen handelt, ist außerdem

$$\begin{aligned} a_p^+ a_n^- + a_n^- a_p^+ &= 0, \\ a_n^+ a_p^- + a_p^- a_n^+ &= 0, \\ a_n^- a_n^+ &= 1 - a_n^+ a_n^-, \\ \text{und } a_p^- a_p^+ &= 1 - a_p^+ a_p^-. \end{aligned}$$

Man führt nun neue Operatoren ein:

$$\begin{aligned} \tau_+ &:= a_p^+ a_n^- \quad (\text{Erhöhung des Isospins um } 1), \\ \tau_- &:= a_n^+ a_p^- \quad (\text{Erniedrigung des Isospins um } 1), \\ \text{und } \tau_0 &:= a_p^+ a_p^- - a_n^+ a_n^-. \end{aligned}$$

Es ergeben sich folgende Vertauschungsrelationen:

$$[\tau_0, \tau_{\pm}] = \pm 2\tau_{\pm} \quad \text{und} \quad [\tau_+, \tau_-] = \tau_0.$$

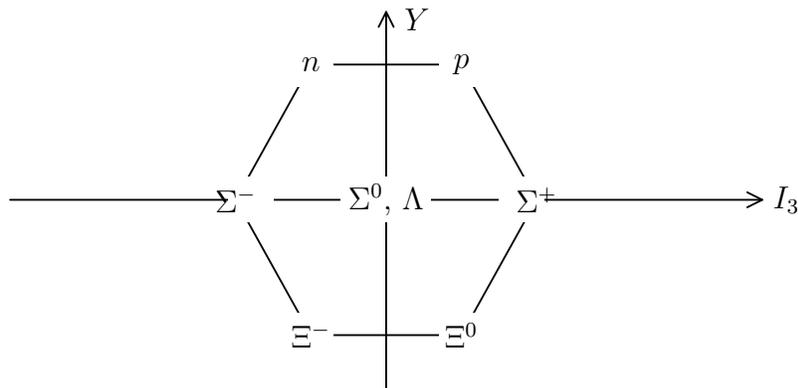
Zum BEWEIS z.B.:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } [\tau_+, \tau_-] &= a_p^+ a_n^- a_n^+ a_p^- - a_n^+ a_p^- a_p^+ a_n^- \\ &= (a_p^+ a_p^- - a_n^+ a_n^-) - a_p^+ a_n^+ a_n^- a_p^- + a_n^+ a_p^+ a_p^- a_n^- \\ &= \tau_0 - a_p^+ a_n^+ a_n^- a_p^- + a_p^+ a_n^+ a_n^- a_p^- = \tau_0. \end{aligned}$$

Also erzeugen τ_+ , τ_- und τ_0 die Liealgebra von $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$. Das ist der Zusammenhang zwischen Isospin und der Darstellungstheorie von $SU(2)$.

Der Begriff „Multipllett“ kann also sowohl irreduzible Darstellungsräume von Liegruppen als auch Gruppen von Elementarteilchen mit gemeinsamen Eigenschaften bedeuten. Die Methode, beides in Beziehung zueinander zu bringen, hat sich als äußerst erfolgreich erwiesen.

Trägt man die Baryonen mit dem Spin 1/2 in einem I_3 - Y -Diagramm auf, so erhält man folgendes Bild:



Das „Baryonen-Oktett“ beruht auf folgender Tabelle:

Neutron:	$I_3 = -1/2$	$Y = 1$
Proton:	$I_3 = 1/2$	$Y = 1$
Σ^- :	$I_3 = -1$	$Y = 0$
Σ^0 :	$I_3 = 0$	$Y = 0$
Σ^+ :	$I_3 = 1$	$Y = 0$
Λ :	$I_3 = 0$	$Y = 0$
Ξ^- :	$I_3 = -1/2$	$Y = -1$
Ξ^0 :	$I_3 = 1/2$	$Y = -1$.

Es ergibt sich das gleiche Bild wie beim Wurzelendiagramm der 3-dimensionalen adjungierten Darstellung von $SU(3)$. Das legt nahe, hier eine neue innere Symmetrie zu sehen. Gell-Mann sprach bei dieser $SU(3)$ -Symmetrie vom „achtfachen Weg“, wegen der hier auftretenden Zahl Acht und wegen seines buddhistischen Hintergrundes.

In ähnlichen Fällen führten solche Symmetriebetrachtungen zur Entdeckung neuer Teilchen.

Quarks:

Um die Idee der Quarks zu verstehen, muss man Tensorprodukte von Darstellungen betrachten. Ausgangspunkt sei etwa die 3-dimensionale Standard-Darstellung der Gruppe $SU(3)$, in der physikalischen Literatur wird sie gerne mit $\mathbf{3}$ bezeichnet, die konjugierte Darstellung mit $\bar{\mathbf{3}}$. Die Tensorpotenzen $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$, $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$, ... zerfallen

in irreduzible Darstellungen. Als Hilfsmittel, diese Zerlegungen zu finden, benutzt man sogenannte Young-Tableaus. Das hängt mit der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe S_n zusammen. Es würde zu weit führen, darauf auch noch im Detail einzugehen.

In der Flavour- $SU(3)$ -Theorie werden Teilchen aus u -, d - und s -Quarks und den entsprechenden Anti-Quarks aufgebaut, in der Color- $SU(3)$ -Theorie gibt es farbige Quarks als Elementarteilchen, allerdings sind nur farblose Zustände erlaubt, also Kombinationen aus allen drei Farben oder aus Farbe und Anti-Farbe.