

§ 6 Quantenphysik

1. Teil: Phänomenologie (der „Teilchenzoo“)

Beginnen wir mit einem knappen historischen Überblick:

Antike – 1800: Vorstellung von Atomen als kleinsten Bauteilen der Materie (Demokrit)

Um 1895: Entdeckung des Elektrons (Thomson)

1900: Nach Untersuchungen der Hohlraumstrahlung macht Max Planck die fundamentale Annahme, dass die Strahlungsenergie nur eine diskrete Folge von Werten annehmen kann. Alle diese Werte sind Vielfache des *Planckschen Wirkungsquantums*

$$h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \text{ (bzw. } \hbar = h/2\pi = 1.0545 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s) .}$$

Um 1910 entwickelt Rutherford sein Atom-Modell: Elektronen kreisen um den Kern, zusammengehalten wird das Ganze durch die Coulombkraft. Dieses Modell konnte bald widerlegt werden. Die Atome müssten beständig strahlen und wären nicht stabil.

1900 – 1920: Einstein entwickelt die Relativitätstheorie und postuliert die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Er entdeckt die Doppelnatur der elektromagnetischen Strahlung, sich bei bestimmten Experimenten wie Wellen und bei anderen wie Teilchen zu verhalten.

1913: Niels Bohr (Dänemark) bezieht die Plancksche Quantenhypothese in die Beschreibung des Atoms ein. Er stellt die Hypothese auf, dass Atome nur in bestimmten Quantenzuständen existieren können. Das Elektron darf sich nur auf bestimmten Orbits aufhalten. Diese Theorie stellte einen großen Fortschritt dar, erschien jedoch recht künstlich und lieferte in gewissen Situationen Ergebnisse, die nicht mit den Beobachtungen übereinstimmten.

1924: de Broglie (Frankreich) schlägt vor: So wie sich Lichtwellen unter gewissen Bedingungen wie Teilchen verhalten können, so können sich Teilchen manchmal auch wie Wellen verhalten. Die Wellenlänge einer „Materiewelle“ ist umgekehrt proportional zum Impuls des Teilchens. Damit können freie Teilchen sehr gut beschrieben werden.

1925: G. E. Uhlenbeck und S. Goudsmit entdecken den Eigen-Drehimpuls (Spin) des Elektrons.

1925 entwickelt Wolfgang Pauli (Österreich) sein „Ausschluss-Prinzip“: Zwei Elektronen können niemals gleichzeitig den selben Quantenzustand besetzen. Dieses Prinzip wird später auf beliebige Quantensysteme angewandt.

1926: Erwin Schrödinger stellt eine Differentialgleichung für Materiewellen auf, die zeigt, wie sich Materiewellen unter dem Einfluss einer äußeren Kraft in Raum

und Zeit bewegen. Seine Theorie macht das Bohrsche Atom-Modell plausibler und korrigiert es so, dass Theorie und Beobachtungen übereinstimmen.

1926 Max Born deutet das Quadrat der Amplitude einer Wellenfunktion als Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Die Wellenfunktion selbst kann nicht direkt physikalisch interpretiert werden.

1927: Werner Heisenberg argumentiert, dass die Mechanik eines Systems nur dann richtig beschrieben werden kann, wenn man den Einfluss des Beobachters auf das System berücksichtigt. Er stellt Observablen (also beobachtbare Größen) als Operatoren dar (Heisenbergsche „Matrizenmechanik“) und formuliert das „Unschärfe-Prinzip“: Die Kenntnis eines Parameters impliziert die Ungewissheit eines anderen „konjugierten“ Parameters:

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq h.$$

Die Heisenbergschen Matrizen werden später durch Operatoren auf einem Hilbertraum ersetzt.

1928: Paul Dirac (England) findet die relativistische Wellengleichung, die zugleich den Elektronenspin berücksichtigt. Wie von der Theorie vorhergesagt, werden 1932 die ersten Anti-Teilchen entdeckt (*Positronen* oder Anti-Elektronen).

1932 wird entdeckt, dass der Atomkern außer Protonen auch *Neutronen* enthält.

Ab 1931 wird von Jordan, Klein, Dirac, Heisenberg und Pauli die relativistische Quantenfeldtheorie entwickelt.

1948 Entdeckung der (schon 1936 von Yukawa vorhergesagten) π -Mesonen („Pionen“).

Von nun an taucht eine immer grösser werdende Flut von Elementarteilchen auf. Wir wollen versuchen, eine gewisse Ordnung in den „Teilchenzoo“ zu bringen.

A) Fermionen und Bosonen:

Elementarteilchen verfügen über einen Eigendrehimpuls oder Spin. Dabei handelt es sich um eine unveräußerliche und unveränderliche Eigenschaft des Teilchens. Als Werte kommen ganzzahlige oder halbzahlige Vielfache von \hbar in Frage:

$$s = n \hbar \quad \text{oder} \quad s = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar.$$

Teilchen mit halbzahligen Spin bezeichnet man als *Fermionen*, Teilchen mit ganzzahligen Spin als *Bosonen*.

Diese Unterscheidung wirkt sich auf Systeme von mehreren Teilchen aus: Ein System von $n = n_1 + \dots + n_k$ gleichen Teilchen (in dem jeweils n_i Teilchen einen bestimmten Zustand μ_i besetzen) wird durch eine Wellenfunktion beschrieben, die man sich als Funktion der n beteiligten Teilchen vorstellen kann. Der Zustand des Systems hängt aber nur davon ab, wieviele Teilchen einen bestimmten Quantenzustand besetzen. Gleichartige Teilchen sind ununterscheidbar, sie können nicht mar-

kiert werden, ohne ihren Zustand zu zerstören. Deshalb kann es keine Observable geben, die die Individualität der Teilchen festlegt. Das heißt aber, dass alle Observablen mit den „Permutationsoperatoren“ (also Vertauschungen von Teilchen) vertauschbar sein müssen, dass also ihr Kommutator verschwindet (denn eine Ausnahme von dieser Regel würde die Markierung individueller Teilchen ermöglichen).

Da man annimmt, dass der Zustand des Systems durch Messung aller vertauschbaren Observablen festgelegt ist (jedenfalls bis auf die nicht messbare Phase der Wellenfunktion), kann man folgern, dass das System in einem anfänglich vorgegebenen Symmetriezustand (bzgl. S_n) für immer verbleibt. Außerdem kann man sich überlegen, dass nur symmetrische oder antisymmetrische Zustände in Frage kommen. Beide Verhaltensweisen können beobachtet werden, aber das Verhalten ist bei allen Teilchen der gleichen Sorte gleich, muss also von einer inneren Eigenschaft der Teilchen herrühren. Tatsächlich hat man festgestellt und schließlich auch unter sehr allgemeinen Bedingungen in der Quantenfeldtheorie bewiesen:

Systeme identischer Fermionen haben antisymmetrische Zustandsfunktionen, Systeme identischer Bosonen haben symmetrische Zustandsfunktionen. Die innere Eigenschaft, die das Symmetrieverhalten unter Permutationen bestimmt, ist also der Spin! Man spricht in diesem Zusammenhang vom *Spin-Statistik-Theorem*.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Spin-Statistik-Theorem ist das *Pauli-Prinzip*: Zwei gleiche Fermionen (und damit insbesondere zwei Elektronen, die den Spin $1/2$ tragen) können sich nie im gleichen Quantenzustand befinden, denn dann würden sie ein symmetrisches Gesamtsystem ergeben. Hieraus folgen die Gesetzmäßigkeiten für das Auffüllen der Elektronenschalen der Atome, woraus sich die Verschiedenartigkeit der Elemente des Periodensystems ergibt.

Bosonen können dagegen jeden Quantenzustand beliebig oft besetzen.

B) Wechselwirkungen:

Man unterscheidet im atomaren Bereich vier primäre Grundkräfte oder Wechselwirkungen.

1. Die *Gravitationskraft* ist die schwächste aller vier Kräfte. Sie wirkt unendlich weit, nimmt aber mit dem Quadrat der Entfernung ab (Newton's Gesetz). Sie wirkt auf alle bekannten Teilchen, ist aber wegen ihrer geringen Wirkung am wenigsten erforscht. Eine quantenmechanische Theorie der Gravitation konnte noch nicht erfolgreich aufgestellt werden. „Gravitonen“, deren Austausch die Gravitations-Wechselwirkung erklären würde, wurden noch nicht entdeckt.
2. Die *elektromagnetische Kraft* wirkt ebenfalls unendlich weit, ist aber die stärkste der vier Wechselwirkungen. Ihre Quelle sind positive oder negative elektrische Ladungen, die Vielfache der Elektronenladung sind. Sie nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab (Coulomb'schen Gesetz), gleichartige Ladungen stoßen sich ab, entgegengesetzte ziehen sich an. Bewegte Ladungen

erzeugen elektromagnetische Felder. In der Quantenelektrodynamik werden diese Phänomene untersucht. Man erkennt, dass Teilchen und Kräfte zwei Erscheinungsformen sogenannter quantisierter Felder sind. Das Feldquant der elektromagnetischen Wechselwirkung ist das masselose *Photon*.

3. Die *starke Wechselwirkung* hat eine Reichweite von etwa 10^{-13} cm. Sie sorgt z.B. für den Zusammenhalt der Atomkerne. Verantwortlich für diese Kräfte sind die *Gluonen*.
4. Die *schwache Wechselwirkung* hat eine Reichweite von etwa 10^{-16} cm. Sie äußert sich in gewissen Zerfallsprozessen (z.B. beim spontanen Zerfall eines Neutrons in ein Proton, ein Elektron und ein Neutrino, dem Beta-Zerfall). Ausgelöst werden solche Prozesse durch den Austausch sogenannter *W- und Z-Bosonen*.

Jetzt können wir eine erste grobe Einteilung geben:

- *Hadronen* nennt man alle Teilchen, die an der starken Wechselwirkung teilnehmen. Sie können auch an der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung teilnehmen.
 - *Mesonen* sind Hadronen mit ganzzahligem Spin, also Bosonen.
 - *Baryonen* sind Hadronen mit halbzahligem Spin, also Fermionen.

In Wirklichkeit sind Hadronen gar keine Elementarteilchen, nach dem heutigen Stand der Forschung setzen sie sich aus kleineren Teilchen zusammen, den *Quarks*. Das sind Fermionen mit Spin $s = 1/2$, die allerdings noch nie einzeln beobachtet wurden. Die Eingeschlossenheit der Quarks in Hadronen bezeichnet man als *Confinement*. Zur Unterscheidung der Quarks wurden neue Quantenzahlen („*flavor*“) eingeführt. So weit mir bekannt ist, unterscheidet man im nicht-relativistischen Fall die folgenden „Geschmacksrichtungen“:

- u (up)
- d (down)
- s (strange)
- c (charm)
- b (bottom oder beauty)
- t (top) (Existenz lange ungesichert, 1995 nachgewiesen).

Ein Meson setzt sich aus einem Quark und einem Antiquark zusammen, ein Baryon aus drei Quarks. In gewissen Fällen ergeben sich allerdings Widersprüche zum Pauli-Prinzip, weil es nun Baryonen geben muss, die aus drei identischen Quarks bestehen, was wiederum unmöglich ist, wenn Quarks Fermionen sind. 1964 wurde die Einführung einer neuen Quantenzahl vorgeschlagen, der Farbe (*color*). Nun unterscheidet man zwischen roten, grünen und blauen Quarks. Die Details dieser Theorie werden in der Quantenchromodynamik untersucht.

- *Leptonen* sind Elementarteilchen mit Spin $s = 1/2$, die nicht an der starken Wechselwirkung teilnehmen. Sie können an der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung teilnehmen.
- *Feldquanten* sind Teilchen mit Spin $s = 1$, deren Austausch die starke, schwache und elektromagnetische Wechselwirkung erzeugt.

C) Die Teilchen:

C.1. Wir beginnen mit den **Leptonen**, die (bislang) als echte Elementarteilchen aufgefasst werden.

Das *Elektron* (e^-) ist das bekannteste und auch das älteste überhaupt bekannte Elementarteilchen. Es hat eine negative Ladung und eine geringe Masse und nimmt an der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung teil. Es hat einen halbzahligen Spin $\pm \frac{1}{2}$. Mit einer Lebensdauer von über 10^{22} Jahren kann das Elektron als stabil angesehen werden. Weil es das leichteste geladene Teilchen ist, würde ein Zerfall dem Gesetz von der Ladungserhaltung widersprechen.

Zu jedem Teilchen gibt es ein Teilchen mit gleicher Masse, gleichem Spin, gleicher Lebensdauer und entgegengesetzten Werten für alle ladungsartigen Quantenzahlen,¹ das *Antiteilchen*. Teilchen ohne ladungsartige Quantenzahlen nennt man echt neutral, sie sind ihr eigenes Antiteilchen. Theoretisch wurde die Existenz von Antimaterie 1928 begründet, in Form von Lösungen der Dirac-Gleichung mit negativer Energie. Diese Interpretation konnte man nicht aufrecht erhalten, stattdessen ließen sich die fraglichen Lösungen als *Positronen* (e^+) deuten, als Antiteilchen zum Elektron (mit positiver Energie). 1932 wurden Positronen in der kosmischen Strahlung nachgewiesen.

Ebenfalls als Bestandteil der Höhenstrahlung wurden 1937 die *Myonen* (μ^-) nachgewiesen, relativ schwere Teilchen mit negativer Ladung und Spin $1/2$. Wegen ihrer großen Masse (etwa 200 mal größer als die des Elektrons) haben sie ein hohes Durchdringungsvermögen. Die Lebensdauer beträgt $2,197 \cdot 10^{-6}$ s. Das Myon zerfällt über die schwache Wechselwirkung in ein Elektron und Neutrinos. Als Baustein unserer stabilen Materie kommt es nicht in Frage. Das Antiteilchen wird μ^+ genannt.

Das *Tau-Lepton* (τ^-) und sein Antiteilchen τ^+ wurden 1975 experimentell nachgewiesen. Sie sind auch relativ schwer, haben Ladung -1 und Spin $1/2$, sowie eine Lebensdauer von $3,03 \cdot 10^{-13}$ s.

Die *Neutrinos* wurden 1931 von Pauli hypothetisch gefordert, um die Energie- und Impulserhaltung beim Beta-Zerfall (Neutron \rightarrow Proton+Elektron) zu garantieren. Pauli vermutete, man würde Neutrinos nie nachweisen können. Inzwischen kennt man das *Elektron-Neutrino* (ν_e und das Antiteilchen $\bar{\nu}_e$) und das *Myon-Neutrino*

¹Typisches Beispiel einer ladungsartigen Quantenzahl ist die elektrische Ladung Q . Andere Beispiele sind die Leptonenzahl L oder die Baryonenzahl B .

(ν_μ und $\bar{\nu}_\mu$). Diese Teilchen sind stabil, haben keine Ladung und wahrscheinlich keine Masse, sowie den Spin $1/2$. Ein *Tau-Neutrino* wird ebenfalls vermutet, konnte aber bisher meines Wissens noch nicht nachgewiesen werden. Bekannt sind z.B. folgende Zerfallsprozesse:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{und} \quad \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.$$

Man hat als neue Quantenzahl die *Leptonenzahl* L eingeführt, die für e^- , μ^- , τ^- , ν_e und ν_μ den Wert 1 und für alle Anti-Leptonen den Wert -1 annimmt. Sie verhält sich additiv wie eine Ladung. In der Standardtheorie der schwachen Wechselwirkung bleibt die Leptonenzahl immer erhalten.

C.2. Als nächstes betrachten wir die **Feldteilchen**. Das sind Bosonen mit dem Spin 1, die man auch als *Vektorbosonen* bezeichnet.

Das *Photon* (γ) ist das Feldquant der elektromagnetischen Wechselwirkung. Es ist stabil, hat keine Masse und keine Ladung. Wie bei allen masselosen Teilchen misst man an Stelle des Spins die Helizität, das ist die Projektion des Spins in Impulsrichtung. Photonen bewegen sich in allen Bezugssystemen mit Lichtgeschwindigkeit c , aber die Helizität ist bei masselosen Teilchen Lorentz-invariant.

W- und Z-Bosonen sind die Feldquanten der schwachen Wechselwirkung. Es gibt die (sehr schweren) W-Bosonen W^\pm , mit Ladung $Q = \pm 1$, und das ebenfalls sehr schwere neutrale Z^0 -Boson. Durch den Austausch solcher Teilchen soll die schwache Wechselwirkung stattfinden. Dieses einfache Bild ist wahrscheinlich veraltet. Im Zuge der Vereinheitlichung der Feldtheorien wurde die Theorie der *elektroschwachen Wechselwirkung* von Glashow-Salam-Weinberg entwickelt, die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung miteinander vereint und für Nicht-Physiker nur noch schwer zu verstehen ist. Und das scheint noch lange nicht das Ende zu sein.

Die starke Wechselwirkung betrifft die Hadronen und damit die Quarks. Auch dazu kann hier nur eine stark vereinfachende und vermutlich schon etwas veraltete Version präsentiert werden. Die Quanten der starken Wechselwirkung nennt man *Gluonen*. Es handelt sich um 8 masselose Teilchen mit einer komplizierten Farbladung, die der „Verklebung“ von Quarks dienen. Früher stellte man sich darunter eine starke „Kernkraft“ vor, die für den Zusammenhang der Atomkerne sorgte.

C.3. Die komplizierteste Teilchenfamilie bilden die **Hadronen**.

Wir beginnen mit den *Protonen* (p) und *Neutronen* (n), aus denen sich die Atomkerne zusammensetzen. Man nennt sie daher auch *Nukleonen*. Das schon sehr lange bekannte Proton ist stabil und hat positive Ladung. Das geringfügig schwerere Neutron ist – wie der Name sagt – neutral. Im freien Zustand zerfällt es nach einer Viertelstunde (Beta-Zerfall), aber im Atomkern sorgt es für die Stabilität. Proton und Neutron haben beide Spin $1/2$, sind also Baryonen. Man führt eine Baryonen-

zahl B ein, die den Wert 1 für das Proton, das Neutron und alle anderen Baryonen hat, -1 für die Anti-Baryonen und 0 für alle anderen Teilchen.

1935 stellte Hideki Yukawa die Vermutung auf, die starke Wechselwirkung käme durch den Austausch von massiven Teilchen zustande, die er *Mesonen* nannte. 1937 wurde ein Teilchen entdeckt, das ungefähr die erwartete Masse hatte, das Myon. Es stellte sich aber heraus, dass das Myon nicht an der starken Wechselwirkung teilnimmt, also zu den Leptonen gehört (siehe oben, C.1). 1947 fand man in der kosmischen Strahlung ein neues Teilchen, das *Pion* oder π -Meson (π^+), das alle Bedingungen von Yukawa erfüllte. Später kam das Antiteilchen π^- und das neutrale π^0 hinzu. Während die π^\pm nur auf Grund der schwachen Wechselwirkung zerfallen können, zerfällt das geringfügig leichtere π^0 elektromagnetisch. Heute weiß man, dass die Pionen nicht für die starke Wechselwirkung verantwortlich sind, aber die Theorie von Yukawa gab dennoch wichtige Impulse für deren Erforschung.

Bis 1947 war die Tabelle der Elementarteilchen recht übersichtlich: Proton, Neutron, Elektron, Photon, Pionen, Neutrinos und das etwas rätselhafte Myon. Dann entdeckte man in Nebelkammer-Versuchen Spuren von bisher unbekanntem Teilchen, die man wegen ihres Bahnverlaufs und ihrer Eigenschaften „seltsame Teilchen“ nannte. Sie werden in zwei Gruppen unterteilt. Eine Gruppe von Baryonen, die schwerer als Nukleonen sind und beim Zerfall Nukleonen abgeben, werden *Hyperonen* genannt. Es gibt das Λ -Hyperon Λ^0 , die Sigma-Teilchen Σ^\pm und Σ^0 , sowie die „Kaskaden-Teilchen“ Ξ und Ξ^0 . Zu allen Hyperonen gibt es auch Antiteilchen. Die andere Gruppe von seltsamen Teilchen besteht aus den K -Mesonen, die weiter unten noch besprochen werden.

Die bisher betrachteten Teilchen werden auch „quasistabil“ genannt. Sie würden nicht zerfallen, wenn es nur die starke Wechselwirkung gäbe. Von dieser Sorte ist auch noch das Ω^- -Teilchen, das zu den Hyperonen gezählt wird. Darüber hinaus hat man einige extrem kurzlebige Baryonen gefunden, man spricht auch von *Resonanzen*. Dazu gehören in erster Linie die Delta-Teilchen Δ^\pm und Δ^0 , aber die Tabellen müssen wohl ständig erweitert und korrigiert werden.

Von den Mesonen haben wir oben schon die Pionen erwähnt. Als seltsame Teilchen kommen die *Kaonen* (oder K -Mesonen) K^\pm und K^0 und das η^0 -Teilchen dazu. Das K^0 -Meson ist besonders interessant, weil es in einer kurzlebigen und einer „langlebigen“ Form vorkommt (K_S^0 und K_L^0). Mesonen-Resonanzen sind die ρ -, η - und ω -Teilchen. Auf der Suche nach den Quarks wurden schließlich weitere neue Teilchen entdeckt, 1974 das J/ψ -Meson, 1977 das Υ -Teilchen und später noch zahlreiche andere, die ich hier nicht alle aufzählen kann.

C.4. Wir kommen zu den Quarks.

Anfang der sechziger Jahre hatte man schon mehr Elementarteilchen gefunden, als es chemische Elemente gab, und man suchte dringend nach einem neuen Ordnungsprinzip. Nun hatte schon Heisenberg 1932 die Idee gehabt, Proton und Neutron zu

einem Teilchen-Paar zusammenzufassen, dem Nukleon. Die ursprünglichen Teilchen sollten dann als verschiedene Ladungszustände eines Nukleons aufgefasst werden. Die starke Wechselwirkung ist unabhängig von solchen Ladungszuständen, das legt nahe, eine neue Erhaltungsgröße einzuführen, den *Isospin* I (der nichts mit dem echten Spin zu tun hat).² Eigentlich muss man sich den Isospin als vektorielle Größe (in einem abstrakten Raum) vorstellen, deren dritte Komponente I_3 beobachtbar ist und die Werte $-I, -I + 1, \dots, +I$ annehmen kann. Sie entscheidet darüber, welcher Zustand vorliegt. Dieses Konzept lässt sich auch auf andere Gruppen von Teilchen (sogenannte *Multipletts*) anwenden. Die Zahl $n = 2I + 1$ der möglichen Werte von I_3 stimmt mit der Anzahl der beteiligten Teilchen überein. Im Falle des Nukleons ist $n = 2$ und daher $I = 1/2$. Ein anderes Beispiel ist das Triplet der Pionen π^+, π^0 und π^- , da ist $n = 3$ und $I = 1$, so dass I_3 die Werte $+1, 0$ und -1 annehmen kann.

Für die elektrische Ladung gilt die Beziehung $Q = I_3 + \frac{1}{2} B$ (mit der Baryonenzahl B , die hier jeweils $= 1$ ist). Damit erhält man für das Proton $I = 1/2, Q = B = 1$ und $I_3 = 1/2$, für das Neutron $I = 1/2, Q = 0, B = 1$ und $I_3 = -1/2$.

Die starke Wechselwirkung eines Nukleons bleibt invariant unter Transformationen durch die Gruppe $SU(2)$. Im Falle des Pionen-Tripletts liegt eine 3-dimensionale Darstellung der $SU(2)$ vor.

Elektrische Ladung, Isospin, Baryonenzahl, Energie und Impuls sind Größen, die bei starken Wechselwirkungen erhalten bleiben. Bei den „seltsamen Teilchen“ konnte man aber beobachten, dass gewisse Reaktionen nie stattfinden, obwohl sie alle Erhaltungssätze erfüllen. Das führte zur Einführung einer neuen Quantenzahl S (*Strangeness*). Die Zahl $Y := S + B$ nennt man die *Hyperladung*. Nach Gell-Mann und Nishijima gilt dann die Beziehung $Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$.

1961 entwarf Gell-Mann ein Schema, alle damals bekannten Hadronen nach Darstellungen der $SU(3)$ -Gruppe zu klassifizieren. Die bekanntesten Mesonen und Baryonen sollten zur 8-dimensionalen Darstellung der $SU(3)$ gehören, weshalb man von der „Theorie des achtfachen Weges“ sprach. Nun war aber unklar, weshalb manche Darstellungen mit Mesonen, manche mit Baryonen und manche überhaupt nicht besetzt werden konnten. 1964 zeigten Gell-Mann und Zweig, dass die von Teilchen besetzten Darstellungen genau diejenigen sind, die von zwei Kombinationen der Standard-Darstellung erzeugt werden. Das war die Geburtsstunde der *Quark-Theorie*.

Es dauerte noch etliche Jahre, bis die Theorie ihre endgültige Gestalt annahm. Wegen der Confinement-Eigenschaft konnten bis heute keine freien Quarks beobachtet werden. Wir wissen also nicht, ob es die Quarks wirklich gibt oder ob es sich nur um ein sehr gutes mathematisches Modell handelt.

Wie schon an früherer Stelle erwähnt gibt es die Typen u, d, c, s, t, b . Sie haben alle den Spin $1/2$, die u -, c - und t -Quarks haben die Ladung $2/3$, die anderen die La-

²*Isospin* ist eine Abkürzung des Begriffes „Isobaren-Spin“.

dung $-1/3$. Alle haben Baryonenzahl $1/3$, weil jeweils 3 Quarks ein Baryon ergeben (während Mesonen aus einem Quark und einem Antiquark zusammengesetzt sind). Die Strangeness-Quantenzahl S taucht hier wieder auf: Das s -Quark hat $S = -1$, alle anderen $S = 0$. Aber das reicht nicht, man braucht noch weitere Quantenzahlen, nämlich C (*Charm*), B (*Bottom*) und T (*Top*). Bei den gleichnamigen Quarks haben diese Zahlen jeweils den Wert $+1$, sonst den Wert 0 .

Hier folgen nun einige Beispiele von Hadronen:

Proton: uud
 Neutron: udd
 das „seltsame Teilchen“ Λ : uds
 das Hyperon Ξ^- : dss
 das K -Meson K^0 : $d\bar{s}$ (\bar{s} ist das Anti-Teilchen)

So weit, so gut. Natürlich kann das alles nicht stimmen! Bei diesem Modell wird eklatant gegen das Pauli-Prinzip verstoßen, eine der Grundfesten der Quantentheorie. Deshalb kommt jetzt die Farbenlehre ins Spiel (Greenberg 1964). Eine neue Quantenzahl (*color*) wird geschaffen, die drei Zustände annehmen kann: r(ed), g(reen), b(lue). Natürlich sind das nur Namen, niemand glaubt, dass Elementarteilchen wirklich charmant oder farbig sind.

Drei Farben werden benötigt, weil einerseits Baryonen aus drei Quarks bestehen (und z.B. das Ω^- -Teilchen aus 3 identischen s -Quarks bestehen würde) und andererseits die Farbe nach außen nicht sichtbar sein darf. Die Farbenlehre funktioniert nun wie beim RGB-Farbsystem in der makroskopischen Welt: Die drei „Grundfarben“ r, g und b mischen sich (additiv) zu weiß (also farblos). Der Übergang zum Antiquark liefert die Komplementärfarbe, also

$$r \rightarrow a \text{ (aqua, türkis)}, \quad g \rightarrow f \text{ (fuchsia, violett)}, \quad b \rightarrow y \text{ (yellow, gelb)}.$$

Die Komplementärfarbe zu r entsteht z.B. additiv aus den beiden anderen Farben g und b . Die Bezeichnungen dieser Komplementärfarben habe ich an die HTML-Namensgebung für Farben angelehnt, dort wird auch mit dem RGB-System gearbeitet. Die Addition von Farbe und Komplementärfarbe ergibt wieder weiß.

Farb-Regeln für Hadronen:

1. Die drei Quarks eines Baryons müssen immer mit allen drei Farben r , g und b besetzt sein. Die dürfen wechseln, aber insgesamt müssen die Baryonen immer farblos bleiben.
2. Quark bzw. Antiquark eines Mesons müssen Farbe (r, g, b) bzw. Antifarbe (a, f, y) tragen. Für die Antifarben verwendet man üblicherweise die Symbole $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$.

Um nun eine angepasste Theorie der starken Wechselwirkung zu erhalten, muss man eine Farbtheorie der Gluonen entwickeln. Das geschieht in der *Quantenchromodynamik*.

Jedes Gluon trägt eine Farbladung und eine Antifarbladung. Die drei Farben liefern einen abstrakten „Farbraum“ V , auf dem – analog zum Isospin-Modell – die Gruppe $SU(3)$ kanonisch operiert. Das ist die Standard-Darstellung $\varrho : SU(3) \rightarrow \text{Aut}(V)$. Gluonen werden durch die Darstellung

$$\varrho \otimes \varrho^* : SU(3) \rightarrow \text{Aut}(V \otimes V^*)$$

beschrieben. Der 9-dimensionale Raum $V \otimes V^*$ ist isomorph zu $\text{End}(V)$, etwa vermöge

$$\mathbf{x}^\top \otimes \bar{\mathbf{y}} \mapsto \mathbf{x}^\top \cdot \bar{\mathbf{y}} \text{ (Matrizen-Multiplikation),}$$

also

$$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \otimes (\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}) \mapsto \begin{pmatrix} r\bar{r} & r\bar{g} & r\bar{b} \\ g\bar{r} & g\bar{g} & g\bar{b} \\ b\bar{r} & b\bar{g} & b\bar{b} \end{pmatrix}.$$

Aber $\text{End}(V)$ zerfällt: $\text{End } V = \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathbb{C} \cdot \text{id}_V$, z.B. vermöge

$$f \mapsto \left(f - \frac{1}{3} \text{Spur}(f) \cdot \text{id}_V, \text{Spur}(f) \cdot \text{id}_V \right).$$

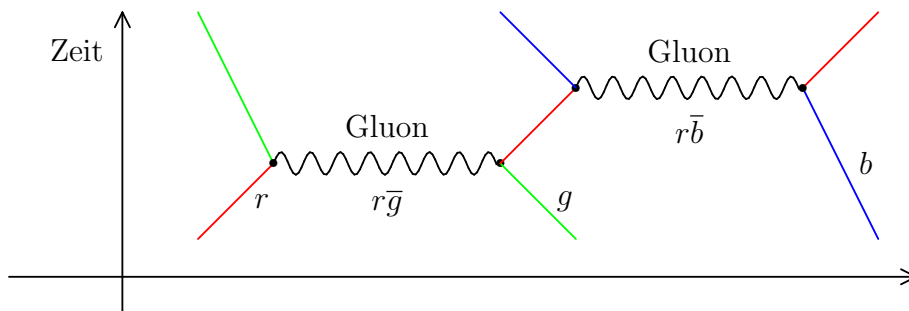
Auf dem 8-dimensionalen Raum $\mathfrak{sl}(V) = \{f \in \text{End}(V) : \text{Spur}(f) = 0\}$ operiert $SU(3)$ durch die adjungierte Darstellung (weil $A^{-1} = \bar{A}^\top$ für $A \in SU(3)$ gilt), und auf dem verbliebenen 1-dimensionalen Raum operiert $SU(3)$ trivial (weil $SU(3)$ das Element $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$ invariant lässt). Physikalisch kann man sich wohl überlegen, dass der triviale Teil kein Gluon liefern kann (weil dann die starke Wechselwirkung unendliche Reichweite hätte). Also bleiben 8 Gluonen übrig (oder ein Gluon mit 8 definierten Zuständen, wenn man die Analogie zum Isospin weiter verfolgen will).

Standardmäßig verwendet man die folgende ON-Basis:

$$r\bar{g}, r\bar{b}, g\bar{r}, g\bar{b}, b\bar{r}, b\bar{g}, \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}).$$

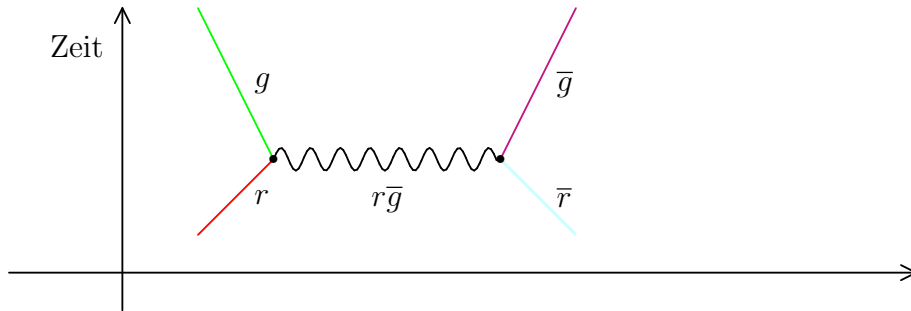
Die letzten beiden Gluonen sind farblos.

Beispiele von Quark-Gluon-Wechselwirkungen kann man sich an Hand von Feynman-Graphen ansehen:



Wie die Zeitachse zeigt, sind die Diagramme von unten zu lesen. Gegeben ist ein Baryon, bestehend aus Quarks in den drei Farben r, g, b . Auf der linken Seite emittiert das rote Quark ein $r\bar{g}$ -Gluon und wird dadurch zu einem grünen Quark. Das Gluon seinerseits wird von dem grünen Quark absorbiert, welches daraufhin rot wird. Danach emittiert das rote Quark noch ein $r\bar{b}$ -Gluon und wird blau, während dieses Gluon vom blauen Quark absorbiert wird, welches sich dadurch in ein rotes Quark verwandelt. Nun ist die Welt wieder in Ordnung.

Nun betrachten wir noch ein Meson $r\bar{r}$, das in ein $g\bar{g}$ -Teilchen verwandelt wird:



Was der Austausch von farblosen Gluonen bewirkt, konnte ich nicht ermitteln.

Mit Sicherheit wurde hier vieles zu einfach dargestellt, aber anders kann man sich keinen ersten Überblick verschaffen. Vollständigkeit wurde erst recht nicht angestrebt, insbesondere habe ich den ganzen Komplex der Eich-Theorien ausgespart. Erwähnen möchte ich nur noch einen wichtigen Operator, die *Ladungs-Konjugation* C , die alle Ladungen umkehrt und damit den Übergang von einem Teilchen zu seinem Antiteilchen vollzieht.