§ 5 Faserbündel und Dirac-Operatoren

X und F seien zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Definition.

Ein *(differenzierbares) Faserbündel* über X mit typischer Faser F besteht aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit E und einer surjektiven differenzierbaren Abbildung $\pi : E \to X$, so dass gilt:

Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$, so dass $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \pi$ ist.

Man sagt dann auch, dass π lokal trivial ist, und nennt φ eine *lokale Trivialisierung.*

Ein *Isomorphismus* zwischen zwei Faserbündeln $\pi_1 : E_1 \to X$ und $\pi_2 : E_2 \to X$ (mit der gleichen typischen Faser F) ist ein Diffeomorphismus $\varphi : E_1 \to E_2$ mit $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$. Man schreibt dann: $E_1 \cong E_2$.

Ein Faserbündel E (mit typischer Faser F) heißt *trivial*, wenn $E \cong X \times F$ ist.

Ein spezielles Beispiel für Faserbündel sind die sogenannten **homogenen Räume**:

Sei G eine Liegruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Wir versehen die Menge G/H aller Nebenklassen (vgl. Anhang F) mit einer Topologie, so dass die kanonische Projektion $\pi : G \to G/H$ (mit $\pi(g) := gH$) stetig wird.

5.1 Satz. *Nennt man $U \subset G/H$ „offen“, falls $\pi^{-1}(U) \subset G$ offen ist, so wird dadurch eine Hausdorff-Topologie auf G/H eingeführt, und die Abbildung π wird dann stetig und offen (bildet also offene Mengen auf offene Mengen ab).*

BEWEIS: Offensichtlich erhält man eine Topologie auf G/H, so dass π stetig wird.

Aber π ist auch offen. Ist nämlich $U \subset G$ offen, so sind auch alle Mengen $Ug = \{ug : u \in U\}$ offen in G. Daher ist

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in G : \exists\, y \in U \text{ mit } xH = yH\} \\ &= \{x \in G : \exists\, y \in U, h \in H \text{ mit } x = yh\} \\ &= \bigcup_{h \in H} Uh \quad \text{offen!} \end{aligned}$$

Nun zur Hausdorff-Eigenschaft: Die Abbildung $\varphi : G \times G \to G$ mit $\varphi(x, y) := x^{-1}y$ ist stetig, also

$$\varphi^{-1}(H) = \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in H\} = \{(x, y) \in G \times G : xH = yH\}$$

abgeschlossen in $G \times G$ und $\{(x, y) \in G \times G : xH \neq yH\}$ offen.

Sei nun $(x_0, y_0) \in G \times G$, $x_0H \neq y_0H$. Dann gibt es offene Umgebungen $U = U(x_0) \subset G$ und $V = V(y_0) \subset G$, so dass $U \times V \subset \{(x, y) \in G \times G : xH \neq yH\}$ ist, also $xH \neq yH$ für $x \in U$ und $y \in V$. Das bedeutet, dass $\pi(U)$ und $\pi(V)$ disjunkte Umgebungen von x_0H bzw. y_0H sind. ∎

Man kann zeigen (vgl. [War]), dass es auf G/H genau eine Mannigfaltigkeits-Struktur gibt, so dass gilt:

1. π ist differenzierbar.
2. Ist $gH \in G/H$, so gibt es eine offene Umgebung $U = U(gH)) \subset G/H$ und einen *differenzierbaren Schnitt* in G über U (d.h., eine differenzierbare Abbildung $s : U \to G$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$).

Die Mannigfaltigkeit G/H bezeichnet man auch als *homogenen Raum*. Eine Funktion $f : G/H \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar, wenn $f \circ \pi : G \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

$\pi : G \to G/H$ ist nun ein Faserbündel mit typischer Faser H. Ist nämlich $s : U \to G$ ein lokaler differenzierbarer Schnitt, so kann man eine lokale Trivialisierung $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times H$ definieren durch $\varphi^{-1}(x, h) := s(x) \cdot h$.

Definition.

Eine Liegruppe G (mit neutralem Element e) *operiert von links* (bzw. *von rechts*) auf einer Mannigfaltigkeit M, falls es eine differenzierbare Abbildung $G \times M \to M$ mit $(g, x) \mapsto g \cdot x$ (bzw. mit $(g, x) \mapsto x \cdot g$) gibt, so dass gilt:

1. $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ (bzw. $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$), für $g_1, g_2 \in G$ und $x \in M$.
2. $e \cdot x = x$ (bzw. $x \cdot e = x$) für alle $x \in M$.

Ist $x_0 \in M$, so nennt man (im Falle einer Links-Operation) die Menge $G \cdot x_0 := \{g \cdot x_0 \;:\; g \in G\}$ die *Bahn* (oder den *Orbit*) des Punktes x_0, und die Gruppe $G_{x_0} := \{g \in G \;:\; g \cdot x_0 = x_0\}$ nennt man die *Isotropiegruppe* von G. Für eine Rechts-Operation definiert man Bahn und Isotropiegruppe analog.

G operiert *transitiv* auf M, wenn es nur eine einzige Bahn gibt.

5.2 Satz. *Die Liegruppe G operiere transitiv (von links) auf der Mannigfaltigkeit M. Sei $x_0 \in M$ und H die Isotropiegruppe von x_0. Dann wird durch $\Phi(gH) := g \cdot x_0$ ein Diffeomorphismus $\Phi : G/H \to M$ definiert.*

Zum Beweis siehe [War].

Beispiel.

Die Gruppe $SO(n)$ operiert auf kanonische Weise auf dem $\mathbb{R}^n$ und auch auf S^{n-1}. Letzteres ergibt eine transitive Operation auf der Sphäre. Die Isotropiegruppe des Punktes $(1, 0, \ldots, 0)$ ist die Gruppe $SO(n-1)$. Das liefert einen Diffeomorphismus $SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}$.

Definition.
Sei $\pi : E \to X$ ein differenzierbares Faserbündel mit typischer Faser F, sowie G eine Liegruppe, die auf F von links (bzw. von rechts) operiert.

Man nennt $\pi : E \to X$ ein Faserbündel mit typischer Faser F und *Strukturgruppe* G, falls es eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von X und lokale Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ gibt, so dass für alle $\alpha, \beta \in A$ mit $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ eine differenzierbare Abbildung $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$ existiert, so dass gilt:

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot v), \text{ (bzw. } = (x, v \cdot g_{\alpha\beta}(x)^{-1})) \text{ für } x \in U_{\alpha\beta},\ v \in F.$$

Die $g_{\alpha\beta}$ nennt man dann *Übergangsfunktionen.*

Bemerkung. Die Übergangsfunktionen erfüllen die „Cozykel-Bedingung“:

$$g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x) \text{ für alle } \alpha, \beta, \gamma \text{ und } x \in U_{\alpha\beta\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Insbesondere ist $g_{\alpha\alpha}(x) \equiv 1$ und $g_{\alpha\beta}(x)^{-1} = g_{\beta\alpha}(x)$.

Definition.
Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ein *(reelles bzw. komplexes) Vektorbündel* vom Rang r über X ist ein differenzierbares Faserbündel $\pi : E \to X$ mit k^r als typischer Faser und $\mathrm{GL}_r(k)$ als Strukturgruppe.

Es gilt dann:

1. Jede Faser $E_x := \pi^{-1}(x)$ trägt auf natürliche Weise eine k-Vektorraum-Struktur.
2. Für alle α, β mit $U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$ gibt es eine differenzierbare Abbildung $g_{\alpha\beta} : U_\alpha\beta \to \mathrm{GL}_n(k)$ mit
$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \mathbf{z}) = (x, \mathbf{z} \cdot g_{\alpha\beta}(x)^\top).$$

Ist nur X, die offene Überdeckung (U_α) und der Cozykel $(g_{\alpha\beta})$ gegeben, so kann man daraus das Vektorbündel rekonstruieren. Man muss nur die Stücke $U_\alpha \times k^r$ mit Hilfe der Übergangsfunktionen „zusammenkleben“.

Beispiel.

Sei (U_α) eine offene Überdeckung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit und $\varphi_\alpha : U_\alpha \to B_\alpha \subset k^n$ jeweils eine Karte für X. Dann liefern die Funktionalmatrizen der Kartenwechsel einen Cozykel, und das zugehörige Vektorbündel $T(X)$ nennt man das Tangentialbündel von X. Die Fasern $T_x(X)$ können auf natürliche Weise mit den Tangentialräumen identifiziert werden, weil zwei Koordinatendarstellungen eines Tangentialvektors mit Hilfe der Funktionalmatrix ineinander überführt werden.

Definition.
Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel, $U \subset X$ offen. Ein *(differenzierbarer) Schnitt* über U in E ist eine differenzierbare Abbildung $s : U \to E$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$. Die Menge aller Schnitte in E über U wird mit $\Gamma(U, E)$ bezeichnet.

Beispiele.

1. Die Schnitte im Tangentialbündel können mit den differenzierbaren Vektorfeldern identifiziert werden.

2. Benutzt man die Matrizen q-reihiger Unterdeterminanten der oben schon betrachteten Funktionalmatrizen, so erhält man einen Cozykel von Übergangsfunktionen für ein Vektorbündel $A^q(X)$, dessen Faser im Punkte x mit der q-fachen äußeren Potenz von $T_x(X)^*$ übereinstimmt. Die differenzierbaren Schnitte in $A^q(X)$ nennt man *Differentialformen* vom Grad q auf X.

   Analog kann man auch beliebige Tensorfelder auf X definieren (die Differentialformen werden als kovariante Tensorfelder bezeichnet). Typisch: Die Tensorfelder (eines festen Typs) bilden einen Modul über $\mathscr{C}^\infty(X)$.

Definition.
Sei G eine Liesche Gruppe und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein *G-Prinzipalbündel* über X ist ein differenzierbares Faserbündel $\pi : P \to X$ mit typischer Faser G, so dass gilt:

1. G operiert von rechts auf P.
2. Es gibt eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von X und lokale Trivialisierungen $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ mit

$$\psi_\alpha^{-1}(x, a) \cdot g = \psi_\alpha^{-1}(x, ag) \text{ für } x \in U_\alpha \text{ und } a, g \in G.$$

Beispiel.

Sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang r. Für $x \in X$ sei

$$\mathscr{B}(E_x) := \mathrm{Iso}_k(k^r, E_x) = \{ \text{Basen von } E_x \}.$$

Dann heißt $P_E := \dot{\bigcup_{x \in X}} \mathscr{B}(E_x)$ das *Bündel der Basen* von E. Dabei sei $\pi : P_E \to X$ die kanonische Projektion.

Die Gruppe $G = \mathrm{GL}_r(k)$ operiert von rechts auf P_E durch

$$(x, \varphi) \cdot A := (x, \varphi \circ f_A), \text{ für } x \in X, \varphi \in \mathscr{B}(E_x),$$

wobei $f_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot A^\top$ ist.

5.3 Satz. *Sei $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel. Dann gilt:*

1. *G operiert frei auf P, d.h.: Ist $p \in P$, $g \in G$ und $p \cdot g = p$, so ist $g = e$.*
2. *Für $p \in P$ ist $p \cdot G = \pi^{-1}(\pi(p))$.*
3. *Es ist $P/G \cong X$, vermöge der Zuordnung $(p \mod G) \mapsto \pi(p)$.*

Zum BEWEIS: Ist $p = \psi_\alpha^{-1}(x, a)$ und $p = p\cdot g = \psi_\alpha^{-1}(x, ag)$, so ist $ag = a$, also $g = e$. Das liefert die erste Aussage. Offensichtlich lässt G die Fasern von π invariant, und weil G transitiv auf sich selbst operiert, folgt die zweite Behauptung. Dass die Orbits bijektiv den Punkten von X entsprechen, ist nun klar.

5.4 Satz. *Sei $\pi : P \to X$ ein differenzierbares Faserbündel und G eine Liegruppe, die von rechts frei auf P operiert, so dass die G-Orbits genau die Fasern von π sind. Dann ist P ein G-Prinzipalbündel.*

Zum BEWEIS benutze man lokale Schnitte von P und konstruiere daraus geeignete Trivialisierungen.

Beispiel.

Sei G eine Liegruppe, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, $\pi : G \to G/H$ die kanonische Projektion. Dann operiert H von rechts auf G durch $(g, h) \mapsto gh$, und es ist $\pi^{-1}(gH) = gH$.

Ist $x_0 = g_0H \in G/H$, so gibt es eine Umgebung $V = V(x_0) \subset G/H$ und einen lokalen Schnitt $s : V \to G$ zu π. Durch $\psi^{-1}(x, h) := s(x) \cdot h$ wird eine lokale Trivialisierung $\psi : \pi^{-1}(V) \to V \times H$ definiert. Offensichtlich gilt für $h' \in H$:

$$\psi^{-1}(x, h) \cdot h' = (s(x) \cdot h) \cdot h' = s(x) \cdot (hh') = \psi^{-1}(x, hh').$$

Damit ist $\pi : G \to G/H$ ein H-Prinzipalbündel.

Ein typisches Beispiel ist die „Hopf-Faserung“ $S^3 \to S^2$ mit Faser S^1.

Es geht noch etwas allgemeiner: Ist G eine Liegruppe, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe und $K \subset H$ ein abgeschlossener Normalteiler, so ist die kanonische Projektion $\pi : G/K \to G/H$ ein Prinzipalbündel mit Faser H/K (weil K Normalteiler ist, ist H/K eine Gruppe).

Wir haben oben schon gesehen, dass es zu jedem Vektorbündel E das Prinzipalbündel P_E der Basen gibt. Sei nun umgekehrt ein G-Prinzipalbündel $\pi : P \to X$ gegeben, sowie eine Darstellung $\varrho : G \to \mathrm{Aut}(V)$. Dann kann man ein Vektorbündel $E = P \times_G V$ wie folgt konstruieren:

Zwei Paare $(p, v), (p', v') \in P \times V$ sollen äquivalent heißen, falls gilt:

$$\exists\, g \in G \text{ mit } (p', v') = (p \cdot g, \varrho(g^{-1})v)\,.$$

Die Menge $P \times_G V$ sei die Menge der Äquivalenzklassen. Offensichtlich sind diese Äquivalenzklassen die Orbits der G-Operation (von rechts) auf $P \times V$, die durch $(p, v) \cdot g = (p \cdot g, \varrho(g^{-1})v)$ gegeben ist. Die Projektion

$$\widetilde{\pi} : P \times_G V \to X$$

sei durch $\widetilde{\pi}([p, v]) := \pi(p)$ gegeben. Wir wählen nun eine offene Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\alpha)$ von X und lokale Trivialisierungen $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$, bzw. die lokalen Schnitte $s_\alpha : U_\alpha \to P$ mit $s_\alpha(x) := \psi_\alpha^{-1}(x, e)$. Dann können wir lokale Trivialisierungen $\varphi_\alpha : \widetilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times V$ definieren durch $\varphi_\alpha^{-1}(x, v) := [s_\alpha(x), v]$. Die Abbildung φ_α selbst ist durch $\varphi_\alpha([p, v]) := (\pi(p), \varrho(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha(p))v)$ gegeben.

a) Dass diese Definition unabhängig von den Repräsentanten ist, sieht man leicht:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha([p \cdot g, \varrho(g^{-1})v]) &= (\pi(p \cdot g), \varrho(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha(p \cdot g))\varrho(g^{-1})v) \\ &= (\pi(p), \varrho(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha(p) \cdot g)\varrho(g^{-1})v) \\ &= (\pi(p), \varrho(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha(p))v) \\ &= \varphi_\alpha([p, v]). \end{aligned}$$

Damit ist $\widetilde{\pi} : P \times_G V \to X$ ein Faserbündel mit typischer Faser V.

b) Identifiziert man V mittels einer festen, aber beliebigen Basis mit k^r, so gibt es differenzierbare Abbildungen $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_r(k)$ mit

$$\varrho(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, e))\, \mathbf{z} = \mathbf{z} \cdot g_{\alpha\beta}(x)^\top.$$

Die $g_{\alpha\beta}$ erweisen sich als Übergangsfunktionen für $P \times_G V$:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \mathbf{v}) &= \varphi_\alpha([s_\beta(x), \mathbf{v}]) \\ &= (\pi \circ s_\beta(x), \varrho(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha(s_\beta(x)))\mathbf{v}) \\ &= (x, \varrho(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, e))\mathbf{v}) \\ &= (x, \mathbf{v} \cdot g_{\alpha\beta}(x)^\top). \end{aligned}$$

Also ist $P \times_G V$ ein Vektorbündel vom Rang r über X.

Definition.

Sei $p : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel und $\lambda : H \to G$ ein Homomorphismus von Liegruppen. Man sagt, ein H-Prinzipalbündel $q : Q \to X$ entsteht aus P durch *Reduktion der Strukturgruppe* mittels λ, falls es eine differenzierbare fasertreue Abbildung $f : Q \to P$ gibt, so dass gilt:

$$f(y \cdot h) = f(y) \cdot \lambda(h), \text{ für } y \in Q \text{ und } h \in H.$$

Umgekehrt nennt man dann P auch eine *G-Erweiterung* von Q.

Die Gruppe H operiert von rechts auf $Q \times G$ durch $(y, g) \cdot h := (y \cdot h, \lambda(h^{-1})g)$. So wie wir oben das assoziierte Vektorbündel konstruiert haben, so erhält man hier ein assoziiertes Prinzipalbündel $Q \times_H G = (Q \times G)\backslash H$. Die Abbildung $f : Q \to P$ induziert einen Isomorphismus $\overline{f} : Q \times_H G \to P$ mit $\overline{f}([y, g]) := f(y) \cdot g$.

Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so kann man jedes H-Prinzipalbündel Q nach dem obigen Muster zu einem G-Prinzipalbündel $Q \times_H G$ erweitern. Umgekehrt ist es im allgemeinen aber nicht möglich, ein G-Prinzipalbündel zu einem H-Bündel zu reduzieren.

5.5 Satz. *Sei G eine Liegruppe, $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel und $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_k(V)$ eine Darstellung. Außerdem sei $E = E(P, \varrho) = P \times_G V$ das assoziierte Vektorbündel. Dann entsteht P aus dem Bündel P_E der Basen von E durch Reduktion der Strukturgruppe mittels $\varrho : G \to \mathrm{GL}_r(k) = \mathrm{Aut}_k(V)$, d.h., es ist $P_E \cong P \times_G \mathrm{GL}_r(k)$.*

Zum BEWEIS: Für $y \in P$ sei $x := \pi(y)$ und $\varphi_y : V \to E_x$ definiert durch $\varphi_y(v) := [y, v]$. Man kann φ_y als Element von $\mathscr{B}(E_x) = (P_E)_x$ auffassen. Dann wird durch $f(y) := \varphi_y$ eine Abbildung $f : P \to P_E$ definiert, von der man leicht nachrechnet, dass sie differenzierbar und fasertreu ist. Außerdem ist $\varphi_{y \cdot g}(v) = [y \cdot g, v] = [y, \varrho(g)v] = \varphi_y(\varrho(g)v)$, also $f(y \cdot g) = \varphi_{y \cdot g} = \varphi_y \circ \varrho(g) = f(y) \cdot \varrho(g)$. ∎

Beispiel.

Sei $\widetilde{\pi} : E \to X$ ein (reelles oder komplexes) Vektorbündel vom Rang r. Unter einer *(euklidischen oder hermiteschen) differenzierbaren Fasermetrik* auf E versteht man die Vorgabe eines (euklidischen oder hermiteschen) Skalarproduktes h_x auf E_x, für jedes $x \in X$, so dass $h_x(\xi(x), \eta(x))$ für differenzierbare Vektorfelder ξ und η differenzierbar von x abhängt.

Sei $\widetilde{\pi} : E \to X$ ein reelles Vektorbündel vom Rang r, zusammen mit einer differenzierbaren Fasermetrik. Man kann stets eine solche Fasermetrik konstruieren (mit Hilfe einer „Teilung der Eins"). Dann ist $P_o(E)$ mit

$$P_o(E)_x := \{\varphi \in \mathrm{Iso}_k(k^r, E_x) \,:\, \varphi \text{ ist eine Isometrie } \}$$

ein $O(r)$-Prinzipalbündel, das *Bündel der Orthonormalbasen* von E. Offensichtlich handelt es sich dabei um eine Reduktion der Strukturgruppe des Bündels aller Basen von E. Diese Reduktion der Strukturgruppe kann man stets durchführen. Ist $E = T(X)$, so nennt man eine Fasermetrik auch eine *Riemannsche Metrik* auf X. Die Mannigfaltigkeit X nennt man in diesem Fall eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit.*

Sei X eine beliebige Mannigfaltigkeit. Eine 2-blättrige Überlagerung von X ist ein Faserbündel $p : \widetilde{X} \to X$ mit typischer Faser $\mathbb{Z}_2$. Man überlegt sich leicht, dass $\widetilde{X}$ sogar ein $\mathbb{Z}_2$-Prinzipalbündel ist. Die Übergangsfunktionen sind stetig und haben Werte in $\mathbb{Z}_2$, müssen also lokal-konstant sein. Deshalb ist die Menge $\mathrm{Cov}_2(X)$ der Äquivalenzklassen von 2-blättrigen Überlagerungen von X isomorph zur Cohomologiegruppe $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ (vgl. Anhang H).[1]

Kehren wir zurück zu den Vektorbündeln. Ein (metrisches) Vektorbündel E heißt *orientierbar*, falls die Fasern auf stetige Weise orientiert werden können. Es muss dann in $P_0(E)$ einen globalen stetigen (und damit auch differenzierbaren) Schnitt b geben, so dass b_x für jedes $x \in X$ eine „positiv orientierte" ON-Basis von E_x ist. Die Gruppe $SO(r) \subset O(r)$ operiert auf den Fasern von $P_0(E)$. Die Orbits in den Fasern entsprechen jeweils den beiden möglichen Orientierungen. Deshalb nennt man das $\mathbb{Z}_2$-Bündel $\mathrm{Or}(E) := P_0(E)/SO(r)$ das *Bündel der Orientierungen* von E. Offensichtlich gilt: E ist genau dann orientierbar, wenn $\mathrm{Or}(E) = X \times \mathbb{Z}_2$ ist. Eine Orientierung von E ist die Auswahl eines der beiden Blätter von $\mathrm{Or}(E)$. Die Äquivalenzklasse von $X \times \mathbb{Z}_2$ in $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ ist die Null.

Das Element $w_1(E) := [\mathrm{Or}(E)] \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ nennt man die *1. Stiefel-Whitney-Klasse* von E. Es gilt:

$$E \text{ orientierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad w_1(E) = 0.$$

Die Auswahl einer Orientierung von E ermöglicht die Reduktion von $P_0(E)$ auf die Gruppe $SO(r)$, liefert also ein $SO(r)$-Prinzipalbündel $P_{so}(E)$. Dieses Bündel gibt es aber nur, wenn E orientierbar ist.

Sei jetzt E ein orientiertes metrisches Bündel vom Rang r über X und $\pi : P_{so}(E) \to X$ das Prinzipalbündel der orientierten Orthogonalbasen von E. Für $r \geq 3$ haben wir eine 2-blättrige Überlagerung $\pi_r : \mathrm{Spin}(r) \to SO(r)$ mit Kern $\mathbb{Z}_2$, wobei $\mathrm{Spin}(r)$ einfach zusammenhängend ist. Man spricht auch von der *universellen Überlagerung*. Im Falle $r = 2$ hat man die 2-blättrige Überlagerung $\pi_2 : SO(2) \to SO(2)$ mit $z \mapsto z^2$, allerdings ist $SO(2)$ nicht einfach zusammenhängend.

Definition.

Eine *Spin-Struktur* auf E ist ein $\mathrm{Spin}(r)$-Prinzipalbündel $\pi' : P_{\mathrm{Spin}}(E) \to X$, zusammen mit einer fasertreuen 2-blättrigen Überlagerung $\sigma : P_{\mathrm{Spin}}(E) \to P_{so}(E)$, so dass gilt:

$$\sigma(y \cdot g) = \sigma(y) \cdot \pi_r(g) \text{ für } y \in P_{\mathrm{Spin}}(E) \text{ und } g \in \mathrm{Spin}(r).$$

Ist $r = 1$, so ist $P_{so}(E) \cong X$, und eine Spin-Struktur auf E ist einfach eine 2-blättrige Überlagerung von X.

[1] Wir wissen schon, dass ein Faserbündel mit Strukturgruppe G durch einen Cozykel gegeben werden kann. Man überzeugt sich nun leicht von folgendem Sachverhalt: *Zwei Bündel, gegeben durch Übergangsfunktionen g_{ij} und g'_{ij} (zur gleichen Überdeckung), sind genau dann isomorph, wenn es Funktionen $h_i : U_i \to G$ gibt, so dass $g'_{ij}(x) = h_i(x)^{-1} \cdot g_{ij}(x) \cdot h_j(x)$ auf U_{ij} gilt.*

Die Einschränkung von σ auf eine Faser ergibt die Überlagerung $\text{Spin}(r) \to SO(r)$. Offensichtlich entsteht $P_{\text{Spin}}(E)$ aus $P_{so}(E)$ durch Reduktion der Strukturgruppe.

Da 2-blättrige Überlagerungen durch Elemente der 1. Cohomologiegruppe mit Werten in $\mathbb{Z}_2$ beschrieben werden, folgt: Die Spin-Strukturen auf E entsprechen Elementen von $H^1(P_{so}(E), \mathbb{Z}_2)$, die bei Einschränkung auf die Fasern von π_{so} nicht trivial sind.

Ohne Beweis sei erwähnt, dass die Faserung $\pi : P_{so}(E) \to X$ (mit Faser $SO(r)$) auf dem Niveau der Cohomologie die folgende exakte Sequenz induziert:

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(P_{so}(E), \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(SO(r), \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j} H^2(X, \mathbb{Z}_2)\,.$$

(Das ergibt sich aus der sogenannten „Serre-Spektralsequenz“). Dabei ist

$$H^1(SO(r), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\},$$

wobei die 0 der trivialen Faserung $SO(r) \times \mathbb{Z}_2$ und die 1 der Spin-Überlagerung entspricht. Dann heißt $w_2(E) := j(1) \in H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ die *2. Stiefel-Whitney-Klasse* von E.

Offensichtlich ist $j(1) = 0$ genau dann, wenn es eine Klasse $h \in H^1(P_{so}(E), \mathbb{Z}_2)$ gibt, deren Bild in $H^1(SO(r), \mathbb{Z}_2)$ die 1 ist, wenn es also eine 2-blättrige Überlagerung von $P_{so}(E)$ gibt, deren Einschränkung auf eine Faser von $P_{so}(E)$ ($\cong SO(r)$) die Spin-Überlagerung ist. Das bedeutet:

5.6 Satz. *Sei $r \geq 3$, E ein orientiertes (metrisches) Vektorbündel vom Rang r über X. Es gibt genau dann eine Spin-Struktur auf E, wenn $w_2(E) = 0$ ist.*

Bemerkung. Sei $\widetilde{\pi} : E \to X$ ein Vektorbündel und $f : Y \to X$ eine differenzierbare Abbildung. Dann wird das zurückgeliftete Bündel $\widetilde{\pi}' : f^*E \to Y$ definiert durch

$$f^*E := E \times_X Y = \{(e, y) \in E \times Y \,:\, \widetilde{\pi}(e) = f(y)\}.$$

Man kann zeigen:

1. E ist genau dann orientierbar, wenn f^*E trivial ist, für alle Einbettungen $f : S^1 \to X$.

2. E besitzt genau dann eine Spin-Struktur, wenn f^*E trivial ist, für alle Einbettungen $f : \Sigma \to X$, wobei Σ eine kompakte Fläche ist.

Definition.

Eine *Spin-Mannigfaltigkeit* ist eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit X mit einer Spin-Struktur auf $T(X)$.

Sei $\widetilde{P} \to X$ eine Spin-Struktur auf einem Vektorbündel E über X. Wir haben die Spin-Darstellungen $\kappa_n : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_n)$ und die Halbspin-Darstellungen $\kappa_{2r}^{\pm} : \mathrm{Spin}(2r) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2r}^{\pm})$.

Die assoziierten Vektorbündel $S_n := \widetilde{P} \times_{\mathrm{Spin}(n)} \Delta_n$ und $S_{2r}^{\pm} := \widetilde{P} \times_{\mathrm{Spin}(2r)} \Delta_{2r}^{\pm}$ nennt man die *Spinorbündel* zu der betrachteten Spin-Struktur. Insbesondere ist

$$S_{2r} = S_{2r}^{+} \oplus S_{2r}^{-} .$$

Wir erinnern uns an die Clifford-Algebra $C_r := C(V, q)$, mit $V := \mathbb{R}^r$ und $q(\mathbf{x}) := -\|\mathbf{x}\|^2$. Die Standard-Darstellung $\varrho : SO(r) \to \mathrm{Aut}(V)$ induziert eine Darstellung von $SO(r)$ auf der Tensor-Algebra $T(V)$, mit $A\cdot(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = (A\cdot v_1)\otimes \ldots \otimes (A\cdot v_k)$ und $A \cdot 1 = 1$. Weil $q(A \cdot v) = q(v)$ ist, bleibt das von den Elementen $v \otimes v - q(v) \cdot 1$ erzeugte Ideal invariant. So erhält man eine Darstellung $cl(\varrho) : SO(r) \to \mathrm{Aut}(C_r)$.

Definition.
Sei E ein orientiertes Vektorbündel vom Rang r über X, versehen mit einer Fasermetrik h. Sei $cl(\varrho) : SO(r) \to \mathrm{Aut}(C_r)$ die oben beschriebene Darstellung. Dann nennt man das Vektorbündel

$$C_r(E) := P_{so}(E) \times_{SO(r)} C_r$$

das *Clifford-Bündel* von E

Die Fasern E_x sind orientierte Vektorräume mit innerem Produkt, und die Fasern von $C_r(E)$ sind jeweils die Clifford-Algebren $C(E_x, -h)$. Tatsächlich handelt es sich bei $C_r(E)$ um ein Bündel von Clifford-Algebren.

Es ist

$$C_r(E) = P_{so}(E) \times_{SO(r)} C_r = (P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_{\mathrm{Spin}(r)} SO(r)) \times_{SO(r)} C_r \cong P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_{\mathrm{Spin}(r)} C_r,$$

vermöge $[[p, A], y] \longleftrightarrow [p \cdot A, y]$.

Definition.
Sei G eine Liegruppe und $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel. Ein *Zusammenhang* in P ist eine Verteilung $H = (H_y)_{y\in P}$ von Unterräumen $H_y \subset T_y(P)$, so dass gilt:

1. $T_y(P) = \mathrm{Ker}(\pi_*) \oplus H_y$, für alle $y \in P$.
2. Sei $g \in G$ und $R_g : P \to P$ die „Rechts-Translation $R_g : y \mapsto y \cdot g$. Dann ist $H_{y\cdot g} = (R_g)_*(H_y)$ für alle $y \in P$.
3. Die Räume H_y hängen in folgendem Sinne differenzierbar von y ab: Zu jedem Punkt $y_0 \in P$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(y_0) \subset P$ und differenzierbare Vektorfelder $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \Gamma(U, T(P))$, so dass $\{\xi_1(y), \ldots, \xi_k(y)\}$ für alle $y \in U$ eine Basis von H_y ist.

H_y nennt man den durch den Zusammenhang bestimmten *horizontalen Unterraum*. Ein Vektorfeld $\xi \in \Gamma(P, T(P))$ wird *horizontal* genannt, wenn $\xi(y) \in H_y$ liegt, für $y \in P$.

Zu jedem differenzierbaren Vektorfeld η auf X gibt es ein eindeutig bestimmtes horizontales Vektorfeld η^h auf P, so dass $\pi_*(\eta^h) = \eta$ ist. Man nennt η^h die *horizontale Liftung* von η.

Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Eine *(alternierende) q-Form* ω auf P mit Werten in V ordnet jedem $y \in P$ eine multilineare alternierende Abbildung

$$\omega_y : T_y(P) \times \ldots \times T_y(P) \to V$$

zu. Ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V, so kann man ω in der Form

$$\omega_y = \sum_{\nu=1}^{n} (\omega_\nu)_y e_\nu$$

schreiben, mit gewöhnlichen Differentialformen ω_ν.

Ist ein Zusammenhang H auf P gegeben, so wird dadurch eine 1-Form auf P mit Werten in der Liealgebra $\mathfrak{g} = L(G)$ definiert:

Sei $\varrho : P \times G \to P$ durch $\varrho(y, g) := y \cdot g$ definiert, sowie $\varrho_y : G \to P$ durch $\varrho_y(g) := \varrho(y, g)$. Dann ist $\pi \circ \varrho_y(g) = \pi(y \cdot g) = \pi(y)$ auf G konstant, also insbesondere $(\varrho_y)_*(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Ker}(\pi_*)$. Für $y \in P$ und $v \in T_y(P)$ sei v_{ver} die vertikale Komponente von v, gegeben durch die Zerlegung $v = v_{ver} + v_{hor}$ mit $v_{ver} \in \mathrm{Ker}(\pi_*)$ und $v_{hor} \in H_y$. Dann ist

$$\omega_y(v) := (\varrho_y)_*^{-1}(v_{ver}) \in \mathfrak{g}.$$

Man nennt ω die *Zusammenhangsform* (oder ein *Eichpotential*). Sie besitzt folgende Eigenschaften:

1. Ist $u \in \mathfrak{g}$, so wird durch $\widetilde{u}_y := (\varrho_y)_*(u)$ ein Vektorfeld $\widetilde{u}$ auf P definiert. Dann ist $\omega(\widetilde{u}) = u$.

2. $R_g^* \omega = \mathrm{ad}(g^{-1})\omega$, d.h.

   $\omega_{y \cdot g}((R_g)_* v) = \mathrm{ad}(g^{-1})(\omega_y(v))$ für $v \in T_y(P)$ und $g \in G$.

BEWEIS: 1) Es ist

$$\omega_y(\widetilde{u}_y) = \omega_y((\varrho_y)_*(u)) = (\varrho_y)_*^{-1}((\varrho_y)_*(u)_{ver}) = u,$$

denn $(\varrho_y)_*(u)$ ist schon automatisch vertikal.

2) Es ist

$$\begin{aligned}
\omega_{y\cdot g}((R_g)_* v) &= (\varrho_{y\cdot g})_*^{-1}\,(((R_g)_* v)_{ver}) \\
&= (\varrho_{y\cdot g})_*^{-1} \circ (R_g)_*(v_{ver}) \\
&= \operatorname{ad}(g^{-1}) \circ (\varrho_y)_*^{-1}(v_{ver}) \\
&= \operatorname{ad}(g^{-1})\omega_y(v),
\end{aligned}$$

denn es ist $\pi \circ R_g = \pi$ (also $(R_g)_*(\operatorname{Ker}(\pi_*)) \subset \operatorname{Ker}(\pi_*)$), sowie

$$\varrho_{y\cdot g} \circ \operatorname{Ad}(g^{-1})(h) = (y \cdot g)g^{-1}hg = (y \cdot h) \cdot g = R_g \circ \varrho_y(h),$$

also $\varrho_{y\cdot g}^{-1} \circ R_g(x) = \operatorname{Ad}(g^{-1}) \circ \varrho_y^{-1}$. ■

Man kann umgekehrt zeigen, dass jede $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form ω auf P mit den Eigenschaften (1) und (2) einen Zusammenhang H definiert, durch

$$H_y := \operatorname{Ker}(\omega_y), \text{ für } y \in P.$$

Definition.

Die $\mathfrak{g}$-wertige 2-Form $\Omega = D\omega$ auf P wird definiert durch

$$(D\omega)_y(u,v) := (d\omega)_y(u_{hor}, v_{hor}) \text{ für } u, v \in T_y(P).$$

Man nennt sie die *Krümmungsform* oder das *Eichfeld*.

Es gilt die „Cartansche Strukturgleichung“: $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$. Wir können an dieser Stelle aber nicht näher darauf eingehen.

Definition.

Sei $\widetilde{\pi} : E \to X$ ein Vektorbündel. Ein *Zusammenhang* (oder eine *kovariante Ableitung*) auf E ist eine Abbildung $\Gamma(X, T(X)) \times \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E)$, $(\xi, s) \mapsto \nabla_\xi s$, mit folgenden Eigenschaften:

1. $\nabla_{\xi+\eta} s = \nabla_\xi s + \nabla_\eta s$ und
   $\nabla_{f\cdot\xi} s = f \cdot \nabla_\xi s$ für $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen f und $s \in \Gamma(X, E)$.
2. $\nabla_\xi(s + t) = \nabla_\xi s + \nabla_\xi t$ und
   $\nabla_\xi(f \cdot s) = f \cdot \nabla_\xi s + \xi[f] \cdot s$.

In dem Vektorfeld-Argument ξ verhält sich ∇ wie ein kovariantes Tensorfeld. Man nennt $\nabla_\xi s$ auch die *kovariante Ableitung von s in Richtung ξ*.

Für $s \in \Gamma(X, E)$ wird $\nabla s \in \Gamma(X, T^*(X) \otimes E)$ definiert durch

$$\nabla s(x)[\xi_x] := (\nabla_\xi s)(x), \text{ für ein Vektorfeld } \xi.$$

(Man beachte den kanonischen Isomorphismus $V^* \otimes W \cong \operatorname{Hom}(V, W)$ mit $\lambda \otimes w \mapsto (v \mapsto \lambda(v) \cdot w)$). Dann ist

$$\nabla(f \cdot s) = df \otimes s + f \cdot \nabla(s).$$

Lokal kann man r Basis-Schnitte $e_1, \ldots, e_r$ in E finden, die E erzeugen. Offensichtlich muss man zur Berechnung von kovarianten Ableitungen nur die Werte ∇e_i kennen. Ist ein Zusammenhang gegeben, so gibt es lokal 1-Formen ω_{ji}, so dass gilt:

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^{r} \omega_{ji} \otimes e_j.$$

Sei jetzt $\widetilde{\pi} : E \to X$ ein orientiertes (metrisches) Vektorbündel vom Rang r und ω die Zusammenhangsform eines Prinzipalzusammenhangs auf $P_{so}(E)$. Außerdem sei $\{e_1, \ldots, e_r\}$ eine ON-Basis von lokalen Schnitten in E. Dann kann man $e := (e_1, \ldots, e_r)$ als lokalen Schnitt in $P_{so}(E)$ auffassen, und $e^*\omega$ ist eine $\mathfrak{so}(r)$-wertige 1-Form auf X. Weil $\mathfrak{so}(r) = \{A \in M_r(\mathbb{R}) \,:\, A^\top = -A\}$ ist, kann man $e^*\omega$ als eine Matrix $(\widetilde{\omega}_{ji})$ von 1-Formen mit $\widetilde{\omega}_{ij} = -\widetilde{\omega}_{ji}$ auffassen. Mit Hilfe der $\widetilde{\omega}_{ji}$ kann man wie oben einen linearen Zusammenhang auf E definieren. Dieser erfüllt außerdem folgende Gleichung:

$$\xi <s\,, t> = <\nabla_\xi s\,, t> + <s\,, \nabla_\xi t>\,.$$

Man spricht dann auch von einem *metrischen* oder *Riemannschen Zusammenhang*. Umgekehrt liefert jeder metrische Zusammenhang auf E einen eindeutig bestimmten Zusammenhang auf $P_{so}(E)$. Auf die genauen Beweise müssen wir hier verzichten.

Sei jetzt X eine n-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist $T(X)$ ein orientiertes metrisches Vektorbündel, und wir setzen $P_{so}(X) := P_{so}(T(X))$, sowie $C\ell(X) := C_n(T(X))$ das zugehörige Clifford-Bündel.

Es sei ein Zusammenhang auf $P_{so}(X)$ gegeben und ∇ die zugehörige kovariante Ableitung. Für zwei Vektorfelder ξ, η auf X sei

$$T_{\xi,\eta} := \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - [\xi, \eta]\,.$$

Man zeigt leicht, dass der Wert von $T_{\xi,\eta}$ in einem Punkt $x \in X$ nur von den Tangentialvektoren ξ_x und η_x abhängt, und man kann daraus folgern, dass T ein Tensorfeld ist, genau genommen eine 2-Form mit Werten in $T(X)$. Man nennt T den *Torsions-Tensor* des Zusammenhangs. Ein fundamentaler Satz der Riemannschen Geometrie besagt, dass es auf $T(X)$ genau einen metrischen Zusammenhang gibt, dessen Torsions-Tensor verschwindet. Diesen Zusammenhang nennt man auch den *Levi-Civita-Zusammenhang* von X. Wenn X eine Spin-Struktur besitzt, so kann dieser Zusammenhang von $P_{so}(X)$ nach $P_{\mathrm{Spin}}(X) := P_{\mathrm{Spin}}(T(X))$ geliftet werden, und das ergibt wiederum einen Zusammenhang auf jedem assoziierten Spinorbündel.

Definition.

Sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\widetilde{\pi} : E \to X$ ein metrisches komplexes Vektorbündel vom Rang q über X (alles orientiert). Ein *Differentialoperator* *der Ordnung* m über X ist eine lineare Abbildung $D : \Gamma(X,E) \to \Gamma(X,E)$, so dass gilt:

Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U = U(x) \subset X$ mit lokalen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und eine lokale Trivialisierung $\varphi : \widetilde{\pi}^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^q$, so dass P lokal folgende Gestalt besitzt:

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha},$$

mit einer $q \times q$-Matrix $A_\alpha(x)$ von differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf U und $A_\alpha \neq 0$ für ein α mit $|\alpha| = m$.

Der Operator P heißt *elliptisch*, falls das sogenannte *Symbol*

$$\sigma_P : U \times k^n \to M_q(\mathbb{C}) \text{ mit } \sigma_P(x, \mathbf{v}) := \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)\mathbf{v}^\alpha$$

für alle $(x, \mathbf{v})$ mit $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ein Element aus $\mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$ liefert.

Beispiel.

Sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Riemannsche Metrik ist ein Skalarprodukt auf den Fasern des Tangentialbündels. In einem lokalen Koordinatensystem wird die Metrik durch eine symmetrische Matrix $G = (g_{ij})$ beschrieben. Traditionsgemäß schreibt man g^{ij} für die Koeffizienten der inversen Matrix G^{-1} und g für $\det(G)$. Dann ist der *Laplace-Beltrami-Operator* $\Delta : \Gamma(X, X \times \mathbb{C}) = \mathscr{C}^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X;\mathbb{C})$ gegeben durch

$$\Delta f := \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

Dann ist

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \text{ Terme kleinerer Ordnung.}$$

Δ ist also ein Differentialoperator 2. Ordnung, und es ist

$$\sigma_\Delta(x, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} v_i v_j = \|\mathbf{v}\| \neq 0$$

für $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Also ist Δ elliptisch.

Definition.

Sei X eine n-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Clifford-Bündel $C\ell_n(X)$. Außerdem sei S ein komplexes Vektorbündel vom Rang q über X, versehen mit einer Fasermetrik und einem metrischen Zusammenhang ∇. Es gebe eine differenzierbare Abbildung $C\ell_n(X) \times S \to S$, die in jedem $x \in X$ eine (treue) Darstellung der Cliffordalgebra $C\ell_n(X)_x = C(T_x(X), -g)$ auf S_x induziert. Dann wird der *Dirac-Operator*

$$D : \Gamma(X, S) \to \Gamma(X, S)$$

wie folgt definiert:

Ist $U \subset X$ offen, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine ON-Basis von $T(X)$ über U und $s \in \Gamma(U, S)$, so setzt man

$$Ds := \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i} s.$$

Dabei bedeutet der Punkt zwischen e_i und $\nabla_{e_i} s$ die Anwendung des Elementes $e_i \in T_x(X) \subset C\ell_n(X)_x$ auf das Element $(\nabla_{e_i} s)_x$. Ist $S \subset C\ell_n(X)$, so bedeutet der Punkt die Clifford-Multiplikation.

5.7 Satz. *D ist ein elliptischer Differentialoperator 1. Ordnung, und $D^2 = D \circ D$ ist ebenfalls elliptisch.*

BEWEIS: Wir müssen die kovariante Ableitung in lokalen Koordinaten ausrechnen.

Wir können in einem festen Punkt $x \in X$ Koordinaten so wählen, dass die Vektorfelder $e_i := \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ in x eine ON-Basis bilden. Sei weiterhin $\{\eta_1, \ldots, \eta_q\}$ eine Basis von S (in der Nähe von x). Dann gibt es differenzierbare Funktionen Γ_{ij}^k („Christoffel-Symbole"), so dass gilt:

$$\nabla_{e_i} \eta_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \eta_k.$$

Dann folgt:

$$\nabla_{e_i}\Big(\sum_{j=1}^{q} s_j \eta_j\Big) = \sum_{j,k} s_j \Gamma_{ij}^k \eta_k + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}(s_j) \cdot \eta_j.$$

Also ist

$$D = \sum_i e_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \text{Terme niedrigerer Ordnung}.$$

Das zeigt, dass D ein Differentialoperator 1. Ordnung ist. Sei $\varrho : C\ell_n(X)_x \to \operatorname{End}(S_x)$ die (treue) Clifford-Darstellung, die durch $s \mapsto e_i \cdot s$ gegeben ist, und $\gamma_i(x) \in M_q(\mathbb{C})$ die Matrix, die den Endomorphismus $\varrho(e_i)$ beschreibt. Da die e_i eine Basis bilden, sind auch die $\gamma_i(x)$ linear unabhängig. Außerdem ist

$$\gamma_i(x) \cdot \gamma_j(x) + \gamma_j(x) \cdot \gamma_i(x) = -2\delta_{ij} \cdot E_q.$$

Ist nun $\mathbf{v} = \sum_i v_i\, e_i \neq \mathbf{0}$, so ist $\varrho(\mathbf{v}) = \sum_i \gamma_i(x) v_i \in M_q(\mathbb{C})$ und $\varrho(\mathbf{v})^2 = -\|\mathbf{v}\|^2 \cdot E_q$ eine reguläre Matrix. Also ist auch

$$\sigma_D(x, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i(x) v_i = \varrho(\mathbf{v})$$

regulär und damit ein Element aus $\mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$. Das bedeutet, dass D elliptisch ist.

Weiter folgt:

$$\begin{aligned} D^2 &= \left(\sum_i \gamma_i(x)(\frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots)\right) \circ \left(\sum_j \gamma_j(x)(\frac{\partial}{\partial x_j} + \cdots)\right) \\ &= \sum_{i,j} \gamma_i(x)\gamma_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \cdots \\ &= -(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}) \cdot E_q + \text{ Terme niedrigerer Ordnung.} \end{aligned}$$

Damit ist $\sigma_{D^2}(x, \mathbf{v}) = -\|\mathbf{v}\|^2 \cdot E_q$. Das zeigt, dass auch D^2 elliptisch ist. ■

Beispiel.

Ist $X = \mathbb{R}^n$ und $S = \mathbb{R}^n \times V$, mit einem endlich-dimensionalen C_n-Modul, so ist

$$D = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad D^2 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\,.$$

An Stelle von riemannschen Mannigfaltigkeiten kann man auch „semi-riemannsche Mannigfaltigkeiten“ betrachten, bei denen jeder Tangentialraum eine Minkowski-Metrik trägt. Manches überträgt sich fast wörtlich, manches wird schwieriger, das ergibt den mathematischen Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie.

Im Falle des trivialen Bündels erhält man den Original-Ansatz von Dirac. Der Laplace-Operator ist dabei durch den d’Alembert-Operator zu ersetzen, und man muss die Clifford-Algebra $C_{3,1}$ benutzen.