§ 4 Spin-Gruppen

Wir betrachten eine Clifford-Algebra $C(V, q)$ und erinnern an die getwistete adjungierte Darstellung $\widetilde{\mathrm{Ad}} : C^\times(V, q) \to \mathrm{Aut}(C(V, q))$ (mit $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(v) := \alpha(x)vx^{-1}$) und die *Clifford-Gruppe*

$$\Gamma(V, q) := \{x \in C^\times(V, q) \,:\, \alpha(x) \cdot V \cdot x^{-1} \subset V\}.$$

$\Gamma(V, q)^+ := \Gamma(V, q) \cap C(V, q)^0$ nennt man *spezielle Clifford-Gruppe*. Der Kern der getwisteten adjungierten Darstellung ist die Gruppe $k^\times$.

Die Spinor-Norm $N(x) = x\overline{x}$ induziert einen Homomorphismus $N : \Gamma(V, q) \to k^\times$, und das Bild von $\Gamma(V, q)$ unter der getwisteten adjungierten Darstellung $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ in $\mathrm{Aut}(V)$ ist in der orthogonalen Gruppe $O(V, q)$ enthalten. Es gibt eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow k^\times \longrightarrow \Gamma(V, q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} O(V, q) \longrightarrow 1\ .$$

Dabei ist $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(v) = v - \dfrac{2b(x, v)}{q(x)}\, x\,,$ für $x \in \Gamma(V, q) \cap V$.

Definition.
Unter der *Spin-Gruppe* versteht man die Gruppe

$$\mathrm{Spin}(V, q) := \{x \in \Gamma(V, q)^+ \,:\, N(x) = 1\}.$$

Außerdem definiert man $\mathrm{Pin}(V, q) := \{x \in \Gamma(V, q) \,:\, N(x) = 1\}$.

Wir wollen diese Gruppen noch etwas anders beschreiben. Sei $x \in \Gamma(V, q)$, $s := \widetilde{\mathrm{Ad}}(x) \in O(V, q)$. Dann gibt es Spiegelungen $s_1, \ldots, s_r$, so dass $s = s_1 \circ \ldots \circ s_r$ ist. Und weiter gibt es Elemente $v_1, \ldots, v_r \in V$ mit $q(v_j) = \pm 1$ und $\widetilde{\mathrm{Ad}}(v_i) = s_i$ für $i = 1, \ldots, r$. Das bedeutet, dass $x = c \cdot v_1 \cdots v_r$ ist, mit $c \in k^\times$. Weil $N(x) = 1$ ist, muss $c^2 = \pm 1$ sein. Im Falle $k = \mathbb{R}$ ist dann $c = \pm 1$, im Falle $k = \mathbb{C}$ ist $c = \pm 1$ oder $= \pm \mathrm{i}$. Also ist

$$\mathrm{Pin}(V, q) = \{v_1 \cdots v_r \in \Gamma(V, q) \,:\, q(v_j) = \pm 1\}$$

und

$$\mathrm{Spin}(V, q) = \{v_1 \cdots v_r \in \mathrm{Pin}(V, q) \,:\, r \text{ gerade }\}.$$

Weiter gilt:

4.1 Satz. *Sei $F = \mathbb{Z}_2$ (im Falle $k = \mathbb{R}$) bzw. $F = \mathbb{Z}_4$ (im Falle $k = \mathbb{C}$). Dann sind die folgenden Sequenzen exakt:*

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow \mathrm{Spin}(V, q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} SO(V, q) \longrightarrow 1$$

und

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow \mathrm{Pin}(V, q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} O(V, q) \longrightarrow 1\ .$$

Beweis: Im Falle $k = \mathbb{R}$ ist $F = \{\pm 1\}$, im Falle $k = \mathbb{C}$ ist $F = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$. Ist $x = v_1 \cdots v_r \in \mathrm{Spin}(V,q)$ und $\widetilde{\mathrm{Ad}}(x) = 1$, so ist $x \in k^\times$, also $x^2 = N(x) = N(v_1) \cdots N(v_r) = \pm 1$. Dann muss x in F liegen. ∎

Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $q(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x}\|^2$, also $C(V,q) = C_n$, so schreibt man $\mathrm{Spin}(n) := \mathrm{Spin}(V,q)$ und erhält die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow SO(n) \to 1\,.$$

Dies zeigt, dass $\mathrm{Spin}(n)$ eine 2-blättrige Überlagerung von $SO(n)$ ist. Wir wissen schon, dass $SO(n)$ zusammenhängend ist. Sei nun $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine ON-Basis von $\mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned}\gamma(t) &:= \cos(2t) + \sin(2t) \cdot e_1 e_2 \\ &= (\cos^2 t - \sin^2 t) + (2 \sin t \cos t) \cdot e_1 e_2 \\ &= \big((\cos t) e_1 + (\sin t) e_2\big) \cdot \big(-(\cos t) e_1 + (\sin t) e_2\big).\end{aligned}$$

Offensichtlich ist γ eine differenzierbare Kurve in $\mathrm{Spin}(n)$, mit $\gamma(0) = 1$ und $\gamma(\pi/2) = -1$. Damit ist auch $\mathrm{Spin}(n)$ zusammenhängend. Man kann sogar zeigen, dass $\mathrm{Spin}(n)$ einfach zusammenhängend, also die universelle Überlagerung von $SO(n)$ ist.

Wir interessieren uns auch für die Gruppen $\mathrm{Spin}(r,s) := \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^{r+s}, q_{r,s})$. Die Gruppen $SO(r,s)$ bestehen aus zwei Zusammenhangskomponenten (im Falle der Lorentz-Gruppe haben wir das in Kapitel 1, §1, gesehen). Es sei $\mathrm{Spin}(r,s)^0$ die Zusammenhangskomponente der Eins. Dann haben wir z.B. folgende exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(3,1)^0 \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \mathscr{L}_+^\uparrow \longrightarrow 1$$

Auch hier liegt eine 2-blättrige Überlagerung vor. Genauere Auskünfte zur Topologie der $\mathrm{Spin}(r,s)$-Gruppen erhält man in [Bau]. Allerdings werden die Clifford-Algebren $C_{r,s}$ dort mit $C_{r+s,r}$ bezeichnet.

Im Folgenden sei immer $k = \mathbb{R}$.

Ansonsten sei V beliebig und q eine beliebige nicht-entartete quadratische Form auf V. Die Gruppe $C^\times(V,q)$ der invertierbaren Elemente der $\mathbb{R}$-Algebra $C(V,q)$ ist eine Liegruppe mit Liealgebra $C(V,q)$. Die Lieklammer ist durch $[x,y] := xy - yx$ gegeben. Die Exponentialabbildung $\mathrm{Exp} : C(V,q) \to C^\times(V,q)$ wird durch die gewöhnliche Exponentialreihe beschrieben.

4.2 Satz. *Die Gruppe* $\mathrm{Spin}(V,q) \subset C^\times(V,q)$ *ist eine Lie-Untergruppe mit Lie-Algebra*

$$\mathfrak{spin}(V,q) = L(\mathrm{Spin}(V,q)) = \bigoplus_{i<j} \mathbb{R} e_i e_j\,,$$

wenn $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *eine ON-Basis von* V *ist, also* $e_i e_j + e_j e_i = 2b(e_i, e_j) = \pm 2\delta_{ij}$.

BEWEIS: Als abgeschlossene Untergruppe ist $\mathrm{Spin}(V,q)$ auch Liegruppe. Ist $q(e_i)\cdot q(e_j)=1$, so verläuft die Kurve

$$\begin{aligned}\gamma_+(t) &:= q(e_j)\cdot\big((\cos t)e_i+(\sin t)e_j\big)\cdot\big((-\cos t)e_i+(\sin t)e_j\big)\\ &= \cos(2t)+\sin(2t)\cdot q(e_j)\cdot e_ie_j\end{aligned}$$

in $\mathrm{Spin}(V,q)$, und es ist $\gamma_+(0)=1$ und $(\gamma_+)'(0)=2q(e_j)e_ie_j$.

Ist $q(e_i)\cdot q(e_j)=-1$, so verläuft die Kurve

$$\begin{aligned}\gamma_-(t) &:= q(e_j)\cdot\big((\cosh t)e_i+(\sinh t)e_j\big)\cdot\big((-\cosh t)e_i+(\sinh t)e_j\big)\\ &= \cosh(2t)+\sinh(2t)\cdot q(e_j)\cdot e_ie_j\end{aligned}$$

in $\mathrm{Spin}(V,q)$, und es ist $\gamma_-(0)=1$ und $(\gamma_-)'(0)=2q(e_j)e_ie_j$.

Also liegen alle Produkte e_ie_j in $L(\mathrm{Spin}(V,q))$. Andererseits ist $\dim(\mathrm{Spin}(V,q))=\dim(SO(V,q))=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}=\dim\bigwedge^2(V)$. ∎

Es ist $L(SO(V,q))\cong\{A\in M_n(\mathbb{R}) : A^\top=-A\}$. Offensichtlich ist dieser Raum isomorph zu $\wedge^2(V)$. Das war auch zu erwarten, $\mathrm{Spin}(V,q)$ ist lokal isomorph zu $SO(V,q)$.

Man sieht auch:

$$\exp(te_ie_j)=\begin{cases}\cos(t)+\sin(t)e_ie_j & \text{falls } q(e_i)q(e_j)=1,\\ \cosh(t)+\sinh(t)e_ie_j & \text{falls } q(e_i)q(e_j)=-1.\end{cases}$$

(Man berechne dazu die Exponentialreihe und berücksichtige $(e_ie_j)^2=-q(e_i)q(e_j)$).

Bevor wir einige Beispiele betrachten, wollen wir noch ein Ergebnis über Clifford-Algebren nachtragen, das wir implizit schon in Kapitel 1 (z.B. im Beweis zu Satz 5.12 in §5) mitbewiesen und benutzt haben.

4.3 Satz. *Sei $C=C(V,q)=C^0(V,q)\oplus C^1(V,q)$ eine Clifford-Algebra. Ist $x_0\in V$, $q(x_0)\neq 0$ und $H:=(kx_0)^\perp$, so ist $V=kx_0\oplus H$.*

Setzt man $q^0(y)=-q(x_0)q(y)$ für $y\in H$, so erhält man eine nicht-entartete quadratische Form auf H, und die Abbildung $h:H\to C^0$ mit $h(y):=y\cdot x_0$ induziert einen Isomorphismus $\widehat{h}:C(H,q^0)\to C^0(V,q)$.

BEWEIS: Die symmetrische Bilinearform $b^0(y,z):=-q(x_0)\cdot b(y,z)$ gehört zur quadratischen Form q^0. Sei $y\in H$. Ist $b^0(y,z)=0$ für alle $z\in H$, so ist auch $b(y,z)=0$, also $y\in H^\perp=kx_0$. Dann muss $y=0$ sein.

Weil $h(y)^2=(yx_0)^2=yx_0yx_0=-y^2x_0^2=-q(y)q(x_0)=q^0(y)$ ist, induziert h einen Homomorphismus von Algebren $\widehat{h}:C(H,q^0)\to C^0$. Dabei ist

$$\widehat{h}(y_1\cdots y_r)=(y_1x_0)\cdots(y_rx_0)=\begin{cases}(-1)^sq(x_0)^sy_1\cdots y_r & \text{für } r=2s,\\ (-1)^sq(x_0)^sy_1\cdots y_rx_0 & \text{für } r=2s+1.\end{cases}$$

Deshalb bildet $\widehat{h}$ die Basiselemente von $C(H,q^0)$ bijektiv auf die Basiselemente von C^0 ab. Also ist $\widehat{h}$ ein Isomorphismus. ∎

Beispiele.

1. Es ist $C_2 = C_{0,2} = \mathbb{H}$, wobei der $\mathbb{R}^2$ dem von i und j aufgespannten Unterraum entspricht. Es ist $C_2^0 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\mathsf{k}$, also

$$\{x \in C_2^0 \, : \, N(x) = 1\} = \{a + d\mathsf{k} \in \mathbb{H} \, : \, a^2 + d^2 = 1\}.$$

Für solche Elemente $x = a + d\mathsf{k}$ gilt:

$$\begin{aligned} (a + d\mathsf{k}) \cdot \mathsf{i} \cdot (a + d\mathsf{k})^{-1} &= (a + d\mathsf{k}) \cdot \mathsf{i} \cdot (a - d\mathsf{k}) \\ &= (a^2 - d^2)\mathsf{i} + 2ad\mathsf{j} \\ \text{und } (a + d\mathsf{k}) \cdot \mathsf{j} \cdot (a + d\mathsf{k})^{-1} &= (a + d\mathsf{k}) \cdot \mathsf{j} \cdot (a - d\mathsf{k}) \\ &= (a^2 - d^2)\mathsf{j} - 2ad\mathsf{i}\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathrm{Spin}(2) = \{a + d\mathsf{k} \in \mathbb{H} \, : \, a^2 + d^2 = 1\} \cong S^1 \cong SO(2) = U(1).$$

Die adjungierte Darstellung

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}(2) \to SO(\mathbb{R}\,\mathsf{i} \oplus \mathbb{R}\,\mathsf{j}) = SO(2)$$

bildet $a + d\mathsf{k}$ auf $\begin{pmatrix} a^2 - d^2 & -2ad \\ 2ad & a^2 - d^2 \end{pmatrix}$ ab. Ist $z = x + \mathsf{i}\,y \in \mathbb{C}$, so ist $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\mathsf{i}$. Daraus erkennt man, dass die Überlagerung $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}(2) = S^1 \to SO(2) = S^1$ durch $z \mapsto z^2$ gegeben wird.

2. Es ist $C_3 = C(0,3) = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. In dem oben bewiesenen Satz haben wir gesehen, dass $C_3^0 \cong C_2 = \mathbb{H}$ und daher $\{x \in C_3^0 \, : \, N(x) = 1\} = \{q \in \mathbb{H} \, : \, \|q\| = 1\} = S^3$ ist.

Die adjungierte Darstellung liefert einen surjektiven Homomorphismus $\varrho : S^3 \to SO(3)$ mit Kern $\mathbb{Z}_2$. Also ist $\mathrm{Spin}(3) = SU(2) = S^3 = Sp(1)$.

3. Wir kennen schon den Isomorphismus

$$\tau : \mathbb{R}^4 \to H_2 = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \, : \, \overline{X}^\top = X\}$$

mit

$$\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} x_4 + x_3 & x_1 - \mathsf{i}\,x_2 \\ x_1 + \mathsf{i}\,x_2 & x_4 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $\det(\tau(\mathbf{x})) = -q_{3,1}(\mathbf{x})$.

Außerdem ist $C_{3,0} = C_{2,0} \otimes C_{0,1} = M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} = M_2(\mathbb{C})$, wobei der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ durch

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - \mathsf{i}\,x_2 \\ x_1 + \mathsf{i}\,x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

in $C_{3,0}$ eingebettet werden kann. Dann ist $N(X) = \det(X)\cdot 1$ (mit $\det(X) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$).

Nun verwenden wir noch einmal den obigen Satz. Wir betten $\mathbb{R}^3$ durch $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3, 0)$ in den $\mathbb{R}^4$ ein. Weil $q_{3,1}(e_4) = -1$ ist, induziert die Abbildung $y \mapsto y \cdot e_4$ einen Isomorphismus $\widehat{h} : C_{3,0} \to C_{3,1}^0$, mit $e_i \mapsto e_i e_4$, $e_i e_j \mapsto e_i e_j$ und $e_1 e_2 e_3 \mapsto e_1 e_2 e_3 e_4$. Daher ist

$$\mathrm{Spin}(3,1)^0 = \{x \in C_{3,1}^0 \,:\, N(x) = 1\} \cong \{X \in M_2(\mathbb{C}) \,:\, \det(X) = 1\} = SL(2,\mathbb{C}).$$

Die Abbildung $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}^0(3,1) \to SO(3,1)^0 := \mathscr{L}_+^{\uparrow}$ mit $\mathrm{Ad}(Y)X = YXY^{-1}$ kennen wir schon. Dies ist ein Beispiel einer nicht-kompakten Spin-Gruppe.

Wir erinnern an die Darstellungen der Clifford-Algebren.

Ist $n = 2r$, so gibt es eine Zerlegung $\mathbb{C}^n = N \oplus P$ in zwei total isotrope Unterräume. $S := \bigwedge(N)$ ist ein Linksideal in $C := C_n^c$, und die linksreguläre Darstellung $\varrho : C \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ ist die einzige irreduzible treue Darstellung von C (weil C einfach ist). Der Spinor-Raum S wird üblicherweise mit Δ_n bezeichnet. Durch Einschränkung von ϱ auf $\mathrm{Spin}(n)$ erhält man eine Darstellung der Spin-Gruppe.

Ist $n = 2r+1$, so ist C_n^c nicht einfach, aber $(C_n^c)^0 \cong C_{2r}^c$ ist einfach. Es gibt genau eine irreduzible Darstellung von $(C_n^c)^0$ auf dem 2^r-dimensionalen Spinorraum $\Delta_{2r+1} := \Delta_{2r}$. Weil $\mathrm{Spin}(n) \subset C_n^0 \subset (C_n^c)^0$ ist, lässt sich diese Darstellung auf $\mathrm{Spin}(n)$ einschränken.

Ist $n = 2r$, so setzt man $\Delta_n^+ := \Delta_n \cap (C_{2r}^c)^0$ und $\Delta_n^- := \Delta_n \cap (C_{2r}^c)^1$. Weil $\mathrm{Spin}(2r) \subset C_{2r}^0 \subset (C_{2r}^c)^0$ ist, lässt $\mathrm{Spin}(2r)$ die 2^{r-1}-dimensionalen Unterräume Δ_n^+ und Δ_n^- invariant.

Definition.

Die oben beschriebenen komplexen Darstellungen $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_n)$ nennt man die *Spin-Darstellungen*.

Im Falle $n = 2r$ nennt man die Darstellungen $\mathrm{Spin}(2r) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2r}^+)$ und $\mathrm{Spin}(2r) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2r}^-)$ die *Halbspin-Darstellungen*. Die Elemente der Darstellungsräume $\Delta_n^\pm$ nennt man *positive* und *negative Weyl-Spinoren*.

4.4 Satz. *Die Spin-Darstellungen sind treu.*

BEWEIS: a) Ist $n = 2r$, so ist die links-reguläre Darstellung $\varrho : C_n \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_n)$ treu (Kap. 1, Satz 5.4), und das gilt auch für die Einschränkung auf $\mathrm{Spin}(2r)$.

b) Ist $n = 2r+1$, so ist $C_n^0 \cong C_{2r}$ und $\Delta_n = \Delta_{2r}$. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}(2r) & \xrightarrow{\varrho_{2r}} & \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2r}) \\ \downarrow & & \| \\ \mathrm{Spin}(2r+1) & \xrightarrow{\varrho_{2r+1}} & \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2r+1}) \end{array}$$

Sei $K := \mathrm{Ker}(\varrho_{2r+1})$. Wegen (a) ist $K \cap \mathrm{Spin}(2r) = \{1\}$.

Weil der Überlagerungs-Homomorphismus $\pi : \mathrm{Spin}(2r+1) \to SO(2r+1)$ surjektiv ist, ist $\pi(K)$ ein Normalteiler in $SO(2r+1)$. Außerdem ist $\pi(K) \cap SO(2r) = \{1\}$.

Sei nun $A \in \pi(K) \subset SO(2r+1)$. Weil das charakteristische Polynom von A ungeraden Grad hat, muss es eine reelle Nullstelle haben. Es gibt also einen reellen Eigenwert λ und einen zugehörigen Eigenvektor v_0. Weil $SO(1) = \{1\}$ ist, lässt A die Gerade durch v_0 punktweise fest. Das bedeutet, dass es ein $B \in SO(2r+1)$ gibt, so dass $BAB^{-1} \in SO(2r)$ liegt (genau genommen im Bild von $SO(2r)$ in $SO(2r+1)$). Weil $\pi(K)$ ein Normalteiler ist, liegt mit A auch BAB^{-1} in $\pi(K)$. Weil $\pi(K) \cap SO(2r) = \{1\}$ ist, muss $BAB^{-1} = 1$ sein, also auch $A = 1$.

Damit kann K selbst höchstens $= \{1\}$ oder $= \{+1, -1\}$ sein. Aber -1 liegt in $\mathrm{Spin}(2r)$, und weil $K \cap \mathrm{Spin}(2r) = \{1\}$ ist, kann -1 nicht in K liegen. Also ist ϱ_{2r+1} treu. ∎

4.5 Satz. *Die Halbspin-Darstellungen von* $\mathrm{Spin}(2r)$ *sind irreduzibel.*

Beweis: Wir haben $\mathrm{Spin}(2r) \subset C^0_{2r} \subset C^c_{2r} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2r}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta^+_{2r} \oplus \Delta^-_{2r})$, denn die linksreguläre Darstellung der Clifford-Algebra ist treu, und es ist $\dim_{\mathbb{C}}(C^c_{2r}) = 2^{2r} = (2^r)^2 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2r}))$, weil $\dim(\Delta_{2r}) = 2^r$ ist.

Wir nehmen nun an, es gäbe einen $\mathrm{Spin}(2r)$-invarianten echten Unterraum $W \subset \Delta^+_{2r}$, der $\neq 0$ ist. Da alle Produkte $e_i e_j$ (mit $i < j$) in $\mathrm{Spin}(2r)$ liegen, ist W invariant unter allen $e_i e_j$ und damit auch unter $(C^c_{2r})^0 \cong C^c_{2r-1}$. Das ergibt eine Darstellung $\varrho : (C^c_{2r})^0 \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$.

Wir haben gezeigt (Kap. 1, Satz 4.9), dass $C^c_{2r-1} \cong C^c_{2r-2} \oplus C^c_{2r-2}$ ist, und C^c_{2r-2} ist isomorph zu $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2r-1})$. Die Einschränkung von ϱ ergibt nun eine Darstellung $\varrho : \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_{2r-1}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$. Weil $\dim(W) < \dim(\Delta^+_{2r}) = 2^{r-1}$ und $\dim(\Delta_{2r-1}) = 2^{r-1}$ ist, muss ϱ trivial sein (siehe nachfolgendes Lemma). Dann ist die Einschränkung der Halbspin-Darstellung von $\mathrm{Spin}(2r)$ auf W trivial. Das kann aber nicht sein, da die Spin-Darstellung treu ist. ∎

4.6 Lemma. *V, W seien komplexe Vektorräume mit* $\dim(W) < \dim(V)$. *Dann ist jeder $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismus* $\Phi : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(W)$ *trivial (also* $\equiv 0$*).*

Beweis: $\mathrm{End}(V)$ und $\mathrm{End}(W)$ sind einfache Algebren (Kap. 1, Satz 5.9). $K := \mathrm{Ker}(\Phi) = \{f \in \mathrm{End}(V) : \Phi(f) = 0\}$ ist ein (zweiseitiges) Ideal in $\mathrm{End}(V)$, muss also $= 0$ oder $= \mathrm{End}(V)$ sein.

Ist $K = 0$, so ist Φ injektiv. Das ist aber aus Dimensionsgründen nicht möglich. Also ist $K = \mathrm{End}(V)$ und $\Phi(f) = 0$ für alle f. ∎

4.7 Satz. *Die Spin-Darstellung von* $\mathrm{Spin}(2r+1)$ *ist irreduzibel.*

BEWEIS: Der Beweis verläuft ähnlich wie bei den Halbspin-Darstellungen.

Es ist $\mathrm{Spin}(2r+1) \subset (C^c_{2r+1})^0 \subset C^c_{2r+1} = \mathrm{End}(\Delta_{2r+1}) \oplus \mathrm{End}(\Delta_{2r+1})$. Ist $W \subset \Delta_{2r+1}$ ein echter invarianter Unterraum, so erhält man eine Darstellung

$$\varrho : (C^c_{2r+1})^0 = C^c_{2r} = \mathrm{End}(\Delta_{2r}) \to \mathrm{End}(W),$$

und es folgt auch hier, dass ϱ trivial ist. Widerspruch! ∎

Wir betrachten hier und im Folgenden nur die kompakten $\mathrm{Spin}(n)$-Gruppen, denn nur in diesem Fall können wir die Darstellungstheorie kompakter Liegruppen anwenden. Den Fall der nicht-kompakten Gruppe $\mathrm{Spin}(3,1)$ werden wir am Schluss des Paragraphen gesondert untersuchen.

Wir suchen nun nach einem maximalen Torus in $\mathrm{Spin}(n)$. Es sei $n = 2r$ oder $= 2r+1$ und $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine ON-Basis von $V = \mathbb{R}^n$ bezüglich $q(x) = -\|x\|^2$.

Für $k = 1, \dots, r$ sei $\varphi_k : U(1) \to \mathrm{Spin}(n)$ definiert durch

$$\varphi_k(e^{\mathrm{i}\,t}) := (\cos t) + (\sin t)e_{2k-1}e_{2k}.$$

Dann ist φ_k ein injektiver Gruppen-Homomorphismus, und für $\lambda = e^{\mathrm{i}\,t}$ ist

$$\varphi_k(-\lambda) = \varphi_k(e^{\mathrm{i}\,(t+\pi)}) = -\varphi_k(\lambda).$$

Es sei $p : \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ die kanonische Überlagerung und

$$T(r) := \{\Delta(R(t_1), \dots, R(t_r)) \,:\, t_\nu \in \mathbb{R}\}$$

der maximale Torus in $SO(n)$. Wir definieren nun $\varphi : T^r := U(1)^r \to \mathrm{Spin}(n)$ durch

$$\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_r) := \varphi_1(\lambda_1) \cdots \varphi_r(\lambda_r)$$

und setzen

$$\widetilde{T}(r) := \varphi(T^r) = \{\prod_{k=1}^{[n/2]} ((\cos t_k) + (\sin t_k)e_{2k-1}e_{2k}) \,:\, t_k \in \mathbb{R} \text{ für } k = 1, \dots, r\}.$$

Behauptung: $\widetilde{T}(r)$ ist ein maximaler Torus in $\mathrm{Spin}(n)$, mit $p(\widetilde{T}(r)) = T(r)$.

BEWEIS: Offensichtlich ist $\widetilde{T}(r)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Spin}(n)$, und weil φ stetig und T^n kompakt und zusammenhängend ist, ist auch $\widetilde{T}(r)$ kompakt und zusammenhängend, also ein Torus.

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{T}(r)$ maximal ist. Das folgt aber aus der Gleichung $p(\widetilde{T}(r)) = T(r)$. Ist nämlich $x \in Z(\widetilde{T}(r))$ und $A = p(\widetilde{A}) \in T(r)$ (mit $\widetilde{A} \in \widetilde{T}(r)$), so ist $\widetilde{A} \cdot x = x \cdot \widetilde{A}$, also $A \cdot p(x) = p(x) \cdot A$. Damit liegt $p(x)$ in $Z(T(r)) = T(r)$, und es gibt ein $y \in \widetilde{T}(r)$ mit $p(y) = p(x)$. Das bedeutet, dass $x = \pm y$ ist. Weil $-1 = \varphi(-1, 1, \dots, 1) \in \widetilde{T}(r)$ ist, liegt auch x in $\widetilde{T}(r)$, der Torus ist maximal.

Wir müssen noch den Beweis der Gleichung $p(\widetilde{T}(r)) = T(r)$ nachtragen.

Sei $x = (\cos t) + (\sin t)e_1e_2$ Dann ist $\alpha(x) = x$ und $x^{-1} = (\cos t) - (\sin t)e_1e_2$, also

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(e_1) &= \alpha(x)\cdot e_1\cdot x^{-1}\\ &= ((\cos t) + (\sin t)e_1e_2)\cdot e_1\cdot((\cos t) - (\sin t)e_1e_2)\\ &= [(\cos t)e_1 + (\sin t)e_2]\cdot[(\cos t) - (\sin t)e_1e_2]\\ &= [(\cos t)^2 - (\sin t)^2]e_1 + 2(\sin t)(\cos t)e_2\\ &= \cos(2t)e_1 + \sin(2t)e_2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(e_2) &= ((\cos t) + (\sin t)e_1e_2)\cdot e_2\cdot((\cos t) - (\sin t)e_1e_2)\\ &= [(\cos t)e_2 - (\sin t)e_1]\cdot[(\cos t) - (\sin t)e_1e_2]\\ &= [(\cos t)^2 - (\sin t)^2]e_2 - 2(\sin t)(\cos t)e_1\\ &= -\sin(2t)e_1 + \cos(2t)e_2.\end{aligned}$$

Das zeigt:

$$p\circ\varphi(e^{\mathrm{i}\,t_1},\dots,e^{\mathrm{i}\,t_r}) = \Delta(R(2t_1),\dots,R(2t_r)).$$

Also ist $p(\varphi(U(1)^r)) = T(r)$. ∎

4.8 Satz. *Es ist* $L(\widetilde{T}(r)) = \bigoplus_{k=1}^{r}\mathbb{R}e_{2k-1}e_{2k}$.

Beweis: Für $k = 1,\dots,r$ ist $\gamma_k(t) := (\cos t) + (\sin t)e_{2k-1}e_{2k}$ jeweils eine Kurve in $\widetilde{T}(r)$, mit $\gamma_k(0) = 1$ und $\gamma_k'(0) = e_{2k-1}e_{2k}$. Also gehören die Elemente $e_{2k-1}e_{2k}$ zu $L(\widetilde{T}(r))$. Da sie andererseits eine r-dimensionale abelsche Unteralgebra von $L(\mathrm{Spin}(n)$ erzeugen, folgt die Behauptung. ∎

Da die Überlagerungsabbildung $p : \mathrm{Spin}(n)\to SO(n)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, besteht natürlich auch die Isomorphie $L(\widetilde{T}(r)) \cong L(T(r))$.

Bemerkung. Die oben definierte Abbildung $\varphi : T^r \to \widetilde{T}(r)$ ist nicht injektiv! Sei $X = (e^{\mathrm{i}\,t_1},\dots,e^{\mathrm{i}\,t_r}) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Dann ist natürlich auch $p\circ\varphi(X) = 1 = \Delta(R(0),\dots,R(0))$. Weil $R(2t) = R(0)$ genau dann gilt, wenn $t\in\pi\mathbb{Z}$ ist, folgt: $t_k = \varepsilon_k\pi \mod 2\pi$, mit $\varepsilon_k\in\{0,1\}$ für $k = 1,\dots,r$. Also ist $X = ((-1)^{\varepsilon_1},\dots,(-1)^{\varepsilon_r})$ und

$$\varphi(X) = (-1)^{\varepsilon_1}\cdots(-1)^{\varepsilon_r} = (-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r}.$$

Damit X tatsächlich in $\mathrm{Ker}(\varphi)$ liegt, muss nun $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r = 0 \mod 2$ sein. Das bedeutet:

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{((-1)^{\varepsilon_1},\dots,(-1)^{\varepsilon_r}) \,:\, \varepsilon_k\in\mathbb{Z}_2 \text{ und } \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r = 0\}.$$

Das sind 2^{r-1} Elemente.

Man kann auch eine bijektive Abbildung finden. $\widetilde{\varphi} : T^r \to \widetilde{T}(n)$ sei definiert durch

$$\widetilde{\varphi}(e^{\mathrm{i}\,t_1}, \ldots, e^{\mathrm{i}\,t_r}) := \varphi_1(t_1) \cdot \prod_{k=2}^{r} \varphi_1(-\frac{t_k}{2})\varphi_k(\frac{t_k}{2})\,.$$

Dann ist

$$p \circ \widetilde{\varphi}(e^{\mathrm{i}\,t_1}, \ldots, e^{\mathrm{i}\,t_r}) = \Delta(R(2t_1 - \sum_{k=2}^{r} t_k), R(t_2), \ldots, R(t_r)).$$

Offensichtlich ist auch $\widetilde{\varphi}$ ein Homomorphismus. Sei nun $X = (e^{\mathrm{i}\,t_1}, \ldots, e^{\mathrm{i}\,t_r}) \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\varphi})$. Dann ist auch $p \circ \widetilde{\varphi}(X) = 1$, also

$$t_k = 2\pi\varepsilon_k \text{ (mit } \varepsilon_k \in \mathbb{Z}\text{), sowie } 2t_1 - \sum_{k=2}^{r} t_k = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist $t_1 = \varepsilon\pi$, mit $\varepsilon = m + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_r \in \mathbb{Z}$, also

$$X = (e^{\mathrm{i}\,\varepsilon\pi}, e^{2\pi\mathrm{i}\,\varepsilon_2}, \ldots, e^{2\pi\mathrm{i}\,\varepsilon_r}) = ((-1)^{\varepsilon}, 1, \ldots, 1).$$

Daraus folgt wiederum, dass $\widetilde{\varphi}(X) = (-1)^{\varepsilon}$ ist. Weil X im Kern von $\widetilde{\varphi}$ liegt, muss $\varepsilon = 0 \mod 2$ sein, also sogar $X = (1, 1, \ldots, 1)$. Das zeigt, dass $\widetilde{\varphi}$ injektiv ist. Man überlegt sich leicht, dass $\widetilde{\varphi}$ auch surjektiv und deshalb ein Isomorphismus ist.

4.9 Satz. *Die Weylgruppen von* $\mathrm{Spin}(n)$ *und* $SO(n)$ *stimmen überein.*

BEWEIS: $T = T(r)$ und $\widetilde{T} = \widetilde{T}(r)$ seien die maximalen Tori von $\mathrm{Spin}(n)$ und $SO(n)$, außerdem sei $N := N_{SO(n)}(T)$ und $\widetilde{N} := N_{\mathrm{Spin}(n)}(\widetilde{T})$.

1) Es ist $p(\widetilde{T}) = T$, also auch $\widetilde{T} \subset p^{-1}(T)$. Ist umgekehrt $x \in p^{-1}(T)$, so liegt $p(x)$ in $T = p(\widetilde{T})$. Es gibt also ein $x' \in T$ mit $p(x) = p(x')$. Weil jede Faser von $p : \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ ist, muss $x' = \pm x$ sein. Und da -1 in $\widetilde{T}$ liegt, ist auch $x \in \widetilde{T}$, also $p^{-1}(T) = \widetilde{T}$.

2) Ist $u \in \widetilde{N}$, so ist $u\widetilde{T}u^{-1} = \widetilde{T}$. Jetzt kann man auf beiden Seiten der Gleichung p anwenden und erhält: $p(u)Tp(u)^{-1} = T$. Das zeigt, dass $p(u)$ in N liegt und p eine Abbildung von $\widetilde{N}$ nach N induziert.

Diese Abbildung ist surjektiv. Ist nämlich ein $v \in N$ gegeben, so ist $vTv^{-1} = T$. Wir können ein beliebiges Element $x \in \mathrm{Spin}(n)$ mit $p(x) = v$ wählen. Dann ist

$$p(x\widetilde{T}x^{-1}) = p(x)Tp(x)^{-1} = vTv^{-1} = T = p(\widetilde{T}).$$

Zu jedem $y \in \widetilde{T}$ muss es also ein $x' \in \widetilde{T}$ mit $xyx^{-1} = \pm x'$ geben. Wie oben folgt, dass $xyx^{-1} \in \widetilde{T}$ ist. Das bedeutet, dass x zu $\widetilde{N}$ und v zu $p(\widetilde{N})$ gehört.

3) Die Abbildung $\mathrm{proj} \circ p : \widetilde{N} \to N/T$ ist surjektiv (nach (2)), und ein $u \in \widetilde{N}$ liegt genau dann im Kern, wenn $p(u) \in T$ ist, also $u \in p^{-1}(T) = \widetilde{T}$ (nach (1)). Daraus folgt die Isomorphie $W(\mathrm{Spin}(n)) = \widetilde{N}/\widetilde{T} \cong N/T = W(SO(n))$. ∎

Beispiel.

Wir betrachten die Spin-Darstellung der Gruppe $\mathrm{Spin}(3) = SU(2) = S^3$.

Es ist $C_3 = C_{0,3} = C(\mathbb{R}^3, q_{0,3})$. Wir erhalten einen Isomorphismus $\widehat{h} : C_2 \to C_3^0$ mit

$$1 \mapsto 1, \quad e_1 \mapsto e_1e_3, \quad e_2 \mapsto e_2e_3 \quad \text{und} \quad e_1e_2 \mapsto e_1e_2.$$

Die Zuordnung $e_1e_3 \mapsto \mathsf{i}$, $e_2e_3 \mapsto \mathsf{j}$ und $e_1e_2 \mapsto \mathsf{k}$ identifiziert C_3^0 mit $\mathbb{H}$. $\mathrm{Spin}(3) \subset C_3^0 \cong \mathbb{H}$ ist die Menge der Quaternionen vom Betrag 1.

Nun ist $C_2^c = \mathbb{H} \otimes \mathbb{C} = M_2(\mathbb{C})$, wobei die Einbettung

$$C_2 = \mathbb{H} \hookrightarrow C_2^c = M_2(\mathbb{C})$$

gegeben ist durch

$$w + z\mathsf{j} \mapsto \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix}.$$

Die Spin-Darstellung ist nichts anderes als die Einschränkung der linksregulären Darstellung $P : M_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_2)$ auf $\mathrm{Spin}(3)$, wobei $\Delta_2 \subset M_2(\mathbb{C})$ ein minimales Linksideal und $P(A)X := A \cdot X$ ist. Als ein solches Linksideal kann man die Menge $\Delta_2 = \{A = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ benutzen.

Identifiziert man $\mathrm{Spin}(3)$ mit $SU(2) \subset M_2(\mathbb{C})$, so steht auch noch die Standard-Darstellung $\varrho : SU(2) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ mit $\varrho(A)\mathbf{z} := \mathbf{z} \cdot A^\top$ zur Verfügung. Wir vergleichen die beiden Darstellungen. Definiert man

$$J : \mathbb{C}^2 \to \Delta_2$$

durch $J(\mathbf{z}) := (\mathbf{z}^\top, \mathbf{0}^\top)$, so erhält man für jedes $A = \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} \in SU(2) = \mathrm{Spin}(3)$ folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\varrho(A)} & \mathbb{C}^2 \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ \Delta_2 & \xrightarrow{P(A)} & \Delta_2 \end{array}$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} J(\varrho(A)\mathbf{z}) &= J(\mathbf{z} \cdot A^\top) \;=\; J(z_1 w + z_2 z, -z_1\overline{z} + z_2\overline{w}) \\ &= \begin{pmatrix} z_1 w + z_2 z & 0 \\ -z_1\overline{z} + z_2\overline{w} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A \cdot J(\mathbf{z}) \;=\; P(A)(J(\mathbf{z})). \end{aligned}$$

Nachdem J ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist, folgt, dass die beiden Darstellungen P und ϱ äquivalent sind. So erweist sich die Spin-Darstellung von $\mathrm{Spin}(3) = SU(2)$ auf $\Delta_3 = \Delta_2 \cong \mathbb{C}^2$ als die Standard-Darstellung.

Die Cliffordalgebra $C_3 = C(\mathbb{R}^3, q_{0,3})$ wird von den Elementen

$$1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3$$

erzeugt, und es ist

$$\mathrm{Spin}(3) = \{a + be_1e_3 + ce_2e_3 + de_1e_2 \,:\, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\},$$

mit Liealgebra $\mathfrak{spin}(3) = \mathbb{R}(e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2) \cong \mathrm{Im}(\mathbb{H})$.

Die Abbildung $\varphi = \varphi_1 : T^1 = U(1) \to \mathrm{Spin}(3)$ mit $\varphi(e^{\mathsf{i}\,t}) := (\cos t) + (\sin t)e_1e_2$ bildet $U(1)$ bijektiv auf einen maximalen Torus

$$T = \widetilde{T}(1) = \{D_t = (\cos t) + (\sin t)e_1e_2 \,:\, t \in \mathbb{R}\}$$

ab, mit Liealgebra $L(T) = \mathbb{R}e_1e_2$. Daher ist $\varphi' : \mathsf{i}\,\mathbb{R} = L(U(1)) \to T$ gegeben durch $\varphi'(\mathsf{i}\,t) = te_1e_2$.

Unter der Identifikation $\mathrm{Spin}(3) = SU(2)$ entspricht dem Element

$$D_t = \cos t + \sin t e_1e_2 = (\cos t) \cdot 1 + (\mathsf{i}\,\sin t) \cdot \mathsf{j}\, \in T$$

die unitäre Matrix $A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \mathsf{i}\,\sin t \\ \mathsf{i}\,\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Nun ist aber

$$(1,1) \cdot A(t)^\top = e^{\mathsf{i}\,t}(1,1) \quad \text{und} \quad (1,-1) \cdot A(t)^\top = e^{-\mathsf{i}\,t} \cdot (1,-1).$$

Die Spin-Darstellung liefert also die beiden Gewichte $\varrho_+(D_t) = e^{\mathsf{i}\,t}$ und $\varrho_-(D_t) = e^{-\mathsf{i}\,t}$.

Das Bild von $A(t)$ in $SO(3)$ unter der Projektion $p : SU(2) \to SO(3)$ berechnet man, indem man die Basis-Matrizen von $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) = S_-$ (also dem Raum der schiefhermiteschen Matrizen mit Spur Null, vgl. Kapitel 1, §3 und §4),

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} \mathsf{i} & 0 \\ 0 & -\mathsf{i} \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{i} \\ \mathsf{i} & 0 \end{pmatrix},$$

mit $A(t)$ konjugiert. Dabei wird $(b,c,d) \in \mathbb{R}^3$ mit $b\tau_3 + c\tau_2 + d\tau_1 \in S_-$ identifiziert.

Berücksichtigt man, dass $A(t)^{-1} = \overline{A(t)}^\top$ ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} A(t) \cdot \tau_3 \cdot A(t)^{-1} &= \cos(2t)\tau_3 + \sin(2t)\tau_2, \\ A(t) \cdot \tau_2 \cdot A(t)^{-1} &= -\sin(2t)\tau_3 + \cos(2t)\tau_2 \\ \text{und } A(t) \cdot \tau_1 \cdot A(t)^{-1} &= \tau_1. \end{aligned}$$

Also erhält man als Bild $p(A(t))$ die Drehmatrix $\begin{pmatrix} R(2t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

In der Literatur ist es üblich, die infinitesimalen Gewichte von Darstellungen von Spin(n) mit Hilfe der Projektionen $\varepsilon_\nu : L(T_{SO(n)}) \to \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ auszudrücken. Zur Erinnerung: Es ist $L(T_{SO(2r+1)}) =$

$$= \{\Delta(S(t_1), \dots, S(t_r)) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -t_1 \\ t_1 & 0 \end{matrix}} & & & \cdots & 0 \\ & & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -t_r \\ t_r & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix} : t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}\}.$$

Dann setzt man $\varepsilon_\nu(\Delta(S(t_1), \dots, S(t_r)) := \mathrm{i}\, t_\nu$.

Als *komplexe infinitesimale Gewichte* der Spin-Darstellung erhält man so die beiden Gewichte $\pm\frac{1}{2}\varepsilon_1$. Genauer sind das die Gewichte $\alpha_\pm$ mit

$$\alpha_\pm(te_1e_2) = \pm\mathrm{i}\, t = \pm\frac{1}{2}\varepsilon_1(\Delta(S(2t))) = \pm\frac{1}{2}\varepsilon_1(p'(te_1e_2)).$$

Mit der gleichen Notation erhält man bei den allgemeinen Spin-Gruppen Spin$(2r)$ und Spin$(2r+1)$ die Gewichte $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \dots \pm \varepsilon_r)$ (vgl. [Ad2], Proposition 4.2).

Wir können die maximalen Tori von Spin(3) und $SO(3)$ beide mit $U(1)$ identifizieren, und ihre Liealgebren mit $\mathfrak{t} = \mathrm{i}\,\mathbb{R}$. Ist p : Spin(3) $\to SO(3)$ die kanonische Überlagerung, so ist $p'(h) = 2h$, für $h \in \mathfrak{t}$. Jede Darstellung $\varrho : SO(3) \to \mathrm{Aut}(E)$ lässt sich zu einer Darstellung $\varrho \circ p : SU(2) \to \mathrm{Aut}(E)$ „liften“. Sei $\alpha = 2\pi\mathrm{i}\,\lambda$ ein infinitesimales Gewicht der Darstellung ϱ. Dann ist $\varrho'(h)v = \alpha(h)\cdot v$, für $h \in \mathfrak{t}$ und $v \in E$, also $(\varrho\circ p)'(h)v = \varrho'(2h)v = \alpha(2h)\cdot v = 2\alpha(h)\cdot v$. Das bedeutet, dass $\beta := 2\alpha$ ein infinitesimales Gewicht von $\varrho\circ p$ ist.

Sei nun $\Gamma = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ das Gitter des Torus. Dann ist $\alpha(\Gamma) \subset 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ und $\beta(\Gamma) \in 4\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Für die Gewichte $\alpha_\pm$ der Spin-Darstellung gilt aber: $\alpha_\pm(\Gamma) = \frac{1}{2}\varepsilon_1(4\pi\mathrm{i}\,\mathbb{Z}) = 2\pi\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$. Also kann die Spin-Darstellung nicht von einer Darstellung von $SO(3)$ herkommen.

In der Physik werden Spin-Darstellungen oft als „mehrwertige“ Darstellungen der orthogonalen Gruppen bezeichnet.

Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir die Gruppe Spin$(3,1)^0$ betrachten.

Dazu ein paar Bemerkungen zu den Beziehungen zwischen reellen und komplexen Liegruppen:

Definition.
Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Liealgebra. Unter einer *Konjugation* auf $\mathfrak{g}$ versteht man einen $\mathbb{R}$-Algebra-Homomorphismus $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ mit $\sigma(c \cdot x) = \overline{c} \cdot \sigma(x)$ für $c \in \mathbb{C}$, $x \in \mathfrak{g}$, so dass $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ ist.

Eine reelle Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ heißt eine *reelle Form* von $\mathfrak{g}$, falls es eine Konjugation σ auf $\mathfrak{g}$ gibt, so dass $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : \sigma(x) = x\}$ ist.

Man kann leicht zeigen: Ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine reelle Form, so ist $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{g}$.

Definition.
Sei G eine komplexe Liegruppe und $G_{(\mathbb{R})}$ die zugrunde liegende reelle Liegruppe. Ist s ein Automorphismus von $G_{(\mathbb{R})}$, $s^2 = \mathrm{id}_G$ und $\sigma := s'$ eine Konjugation auf $L(G)$, so heißt die zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe $H := \{g \in G : s(g) = g\}^0$ eine *reelle Form* von G und umgekehrt G eine *Komplexifizierung* von H.

Beispiele.

1. Sei $G = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $s : G \to G$ definiert durch $s(z) := \overline{z}^{-1}$. Das ist ein Automorphismus von $(\mathbb{C}^\times)_{(\mathbb{R})}$, und $\sigma = s'$ mit $\sigma(w) = -\overline{w}$ ist eine Konjugation auf $L(G) = \mathbb{C}$. Also ist $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times : s(z) = z\}$ eine reelle Form von G.

2. Sei $G := \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Für $A \in G$ sei $A^* := \overline{A}^\top$ und $s(A) := (A^*)^{-1}$. Auch hier ist s ein Automorphismus der reellen Gruppe. Außerdem ist $\sigma(A) := s'(A) = -A^*$ ein Konjugation auf $L(G) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \ \mathrm{Spur}(A) = 0\}$. Also ist $SU(n) = \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) : A \cdot A^* = 1\}$ eine reelle Form von G.

Die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe $\mathscr{L}_+^\uparrow = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ ist eine komplexe Liegruppe. Sie ist isomorph zur Möbiusgruppe $\mathscr{M}$ aller biholomorphen Transformationen von $\overline{\mathbb{C}}$, also Transformationen der Gestalt $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$. Man kann zeigen, dass $SO(3)$ eine reelle Form von $\mathscr{L}_+^\uparrow$ ist.

4.10 Satz (Weyl's unitärer Trick).

1. *Jede komplexe halbeinfache Liegruppe G enthält eine kompakte reelle Liegruppe K, die eine reelle Form von G ist.*

2. *Jede kompakte halbeinfache Liegruppe K besitzt eine (halbeinfache) Komplexifizierung G. Durch $\varrho \mapsto \varrho|_K$ erhält man eine bijektive Zuordnung zwischen den Darstellungen von G und denen von K. Insbesondere besitzt jede halbeinfache komplexe Liegruppe eine treue (komplexe) Darstellung.*

3. *Sei G Komplexifizierung von K. Ist f eine holomorphe Funktion auf G und $f|_K = 0$, so ist $f = 0$.*

Auf den Beweis müssen wir hier verzichten.

Die Darstellungen von $\mathscr{L}_+^\uparrow$ und $\text{Spin}(3,1)^0 = \text{SL}(2,\mathbb{C})$ sind also im Prinzip die gleichen wie die von $SO(3)$ und $\text{Spin}(3) = SU(2)$. Es scheint allerdings so, dass dieser Zusammenhang in der Praxis kaum genutzt wird.

Ist $0 \le r, s \le 8$ und entweder $r = s$ oder $r = s + 2$, so ist $C_{r,s} \cong M_{2^{n/2}}(\mathbb{R})$ (mit $n = r + s$). Den Isomorphismus

$$\varrho : C_{3,1} \to M_4(\mathbb{R}) = \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$$

nennt man die *Majorana-Darstellung*, den davon induzierten Isomorphismus

$$\varrho^c : C_{3,1}^c \to M_4(\mathbb{C}) = \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$$

die *Dirac-Darstellung*. Ist $\{e_1, \ldots, e_4\}$ eine ON-Basis von $\mathbb{R}^4$ (bezüglich $q_{3,1}$), so liefern die Bilder $\gamma_i := \varrho(e_i)$ ein System von Dirac-Matrizen. Außerdem setzt man meist noch $\gamma_5 := \varrho(e_1e_2e_3e_4)$. Es ist $\gamma_5^2 = -\text{id}$. Sei nun $L := \frac{1}{2}(\text{id} - \mathsf{i}\,\gamma_5)$ und $R := \frac{1}{2}(\text{id} + \mathsf{i}\,\gamma_5)$. Da $v\gamma_5 = -\gamma_5 v$ für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^4$ und somit $x\gamma_5 = \gamma_5 x$ für alle Elemente von $\text{Spin}(3,1)$ gilt, ist auch $\varrho(x)L = L\varrho(x)$ und $\varrho(x)R = R\varrho(x)$.

Also zerfällt die durch Einschränkung von ϱ^c auf $\text{Spin}(3,1)$ gewonnene Darstellung in zwei Teildarstellungen. Die Elemente der beiden (2-dimensionalen) Darstellungsräume nennt man *Weyl-Spinoren* oder *chirale Spinoren*. Im Reellen ist diese Zerlegung nicht möglich.