§ 3 Darstellungstheorie (Weylgruppen und Killingformen)

Das wohl wichtigste Beispiel in der Darstellungstheorie von Liegruppen und Liealgebren ist die Gruppe $G = SU(2)$. Die zugehörige Liealgebra ist

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) = L(SU(2)) = \{\begin{pmatrix} \mathsf{i}\,x & z \\ -\overline{z} & -\mathsf{i}\,x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\}.$$

Der maximale Torus $T \subset G$ ist gegeben als $T = \{\Delta(u, \overline{u}) : u \in \mathbb{C}, |u| = 1\}$. Seine Liealgebra ist

$$\mathfrak{t} = L(T) = \{\begin{pmatrix} \mathsf{i}\,x & 0 \\ 0 & -\mathsf{i}\,x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}.$$

T operiert durch die adjungierte Darstellung auf $\mathfrak{g}$. Wir betrachten das zunächst im Stile von Adams (siehe [Ad1]) rein reell. Offensichtlich bleibt $V_0 := \mathfrak{t}$ invariant. Nun sei $V_1 \subset \mathfrak{g}$ der reell 2-dimensionale Raum der Matrizen $M_z := \begin{pmatrix} 0 & z \\ -\overline{z} & 0 \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{C}$. Für $u = e^{\mathsf{i}\,x}$ und $D_u := \Delta(u, \overline{u}) = \exp(\Delta(\mathsf{i}\,x, -\mathsf{i}\,x))$ ist

$$D_u \cdot M_z \cdot D_u^{-1} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z \\ -\overline{z} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = M_{u^2 z}\,,$$

also $\mathrm{Ad}(D_u)(M_z) = \varrho(D_u) \cdot M_z$, wobei $\varrho : T \to U(1)$ durch $\varrho(D_u) := u^2$ und die Multiplikation mit komplexen Zahlen in V_1 durch $c \cdot M_z := M_{cz}$ definiert wird. Also ist ϱ eine Wurzel von $SU(2)$. Infinitesimal ergibt sich:

$$\mathrm{ad}(\Delta(\mathsf{i}\,x, -\mathsf{i}\,x))M_z = \alpha(\Delta(\mathsf{i}\,x, -\mathsf{i}\,x)) \cdot M_z, \text{ mit } \alpha := 2\varepsilon \text{ und } \varepsilon(\Delta(\mathsf{i}\,x, -\mathsf{i}\,x)) := \mathsf{i}\,x.$$

Damit ist $\alpha(\Delta(\mathsf{i}\,x, -\mathsf{i}\,x)) = 2\mathsf{i}\,x$ eine infinitesimale Wurzel und $\lambda(\Delta(\mathsf{i}\,x, -\mathsf{i}\,x)) = \frac{1}{\pi}x$ eine reelle infinitesimale Wurzel.

Das Gitter $\Gamma_T = \mathrm{Ker}(\exp_T)$ besteht aus den Matrizen $\Delta_n := \Delta(2\pi\mathsf{i}\,n, -2\pi\mathsf{i}\,n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Offensichtlich liegt $\lambda(\Delta_n) = 2n$ in $\mathbb{Z}$.

Benutzt man die reelle Basis $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $N := \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{i} \\ \mathsf{i} & 0 \end{pmatrix}$ von V_1, so operiert $D_u = \exp(\Delta(\mathsf{i}\,x, -\mathsf{i}\,x)) \in T$ (durch die adjungierte Darstellung) als Drehmatrix $R(2x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & -\sin(2x) \\ \sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}$. Setzt man nämlich $J(aM + bN) := (a, b)^\top$, so ist

$$R(2x) \cdot J(M_z) = J(e^{2\mathsf{i}\,x} \cdot M_z).$$

Mit $\overline{J}(aM + bN) := (a, -b)^\top$ (also der Basis $\{M, -N\}$) ist dagegen $\overline{J}(M_z) = M_{\overline{z}}$ und

$$R(-2x) \cdot \overline{J}(M_z) = J(e^{-2\mathsf{i}\,x} \cdot M_{\overline{z}}) = \overline{J}(e^{2\mathsf{i}\,x} \cdot M_z).$$

Das zeigt, dass mit α auch $-\alpha$ eine infinitesimale Wurzel ist.

Weiter verbreitet in der Literatur ist die rein komplexe Betrachtungsweise. Wir wissen schon, dass hier $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{Spur}(A) = 0\}$ ist. Außerdem ist $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \{\Delta(u, -u) : u \in \mathbb{C}\}$. Über $\mathbb{C}$ hat man die kanonische Basis

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } X_- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei erzeugt H die maximale abelsche Unteralgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, und man erhält die folgenden Kommutatoren:

$$[H, X_+] = 2X_+, \quad [H, X_-] = -2X_- \text{ und } [X_+, X_-] = H.$$

Definiert man wieder $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ durch $\alpha(\Delta(u,-u)) := 2\varepsilon(\Delta(u,-u)) = 2u$ (also $\alpha(H) = 2$), so ist

$$\mathrm{ad}(H)X_+ = \alpha(H) \cdot X_+ \quad \text{ und } \quad \mathrm{ad}(H)X_- = -\alpha(H) \cdot X_-\,.$$

Das ergibt wieder – und sogar etwas einfacher – das Wurzelsystem $\{\pm\alpha\}$.

Die Matrizen

$$U := X_+ - X_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V := \mathsf{i}\,(X_+ + X_-) = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{i} \\ \mathsf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathsf{i}\,H = \begin{pmatrix} \mathsf{i} & 0 \\ 0 & -\mathsf{i} \end{pmatrix}$$

bilden eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathfrak{g}$, mit $\mathsf{i}\,H \in \mathfrak{t}$ und

$$[\mathsf{i}\,H, U] = 2V, \quad [\mathsf{i}\,H, V] = -2U \quad \text{ und } [U,V] = 2\mathsf{i}\,H\,.$$

Wir führen nun die allgemeine Theorie weiter.

Definition.

Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und $T \subset G$ ein maximaler Torus. Dann nennt man

$$W(G) = W_T(G) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(T) \,:\, \exists\, g \in G \text{ mit } \varphi = i_g|_T\}$$

die *Weylgruppe* von G.

3.1 Satz. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt:*

1. *Es ist $W(G) \cong N_G(T)/Z_G(T) = N_G(T)/T$.*
2. *Die Weylgruppe ist endlich und unabhängig vom maximalen Torus T.*

Beweis: 1) Ist $g \in G$ und $i_g(T) \subset T$, so liegt g in $N_G(T)$. Sei nun $g \in N_G(T)$. Dann ist $i_g(t) = gtg^{-1} \in T$ für $t \in T$. Also haben wir eine surjektive Abbildung $h : N_G(T) \to \mathrm{Aut}(T)$ mit $h(g) := i_g$. Dabei ist $h(g_1g_2) = h(g_1)\circ h(g_2)$, und $\mathrm{Ker}(h) = \{g \in G \,:\, gtg^{-1} = t \text{ für } t \in T\} = Z_G(T)$. Daraus folgt $N_G(T)/Z_G(T) \cong W(G)$. Da T maximal ist, ist $Z_G(T) = T$.

2) Ist $T' = g_0 T g_0^{-1}$ ein weiterer maximaler Torus, so definiere man $\omega : W_{T'}(G) \to W_T(G)$ durch $\omega(\varphi) := \varphi \circ i_{g_0}$. Ist $\varphi = i_g|_{T'}$, so ist $\omega(\varphi) = i_{gg_0}|_T$. Man überlegt sich leicht, dass ω ein Isomorphismus ist.

$N_G(T)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von G. Die Zusammenhangskomponente der Eins $N_G(T)^0$ ist darin offen, $N_G(T)/N_G(T)^0$ endlich. Man kann zeigen, dass $N_G(T)^0 = T$ ist. Daraus folgt, dass $W(G)$ endlich ist. ∎

Die Weylgruppe operiert auf dem maximalen Torus: Ist $w \in W(G)$, $w = i_g|_T$, so ist $w \cdot t = gtg^{-1}$. Man kann zeigen:

> *Zwei Elemente $x, y \in T$ sind genau dann in G konjugiert, wenn sie im gleichen $W(G)$-Orbit liegen.*

Die eine Richtung ist trivial. Ist $y = gxg^{-1}$, so muss man nachweisen, dass es ein $h \in G$ gibt, so dass $gxg^{-1} = hxh^{-1}$ und $hTh^{-1} = T$ ist.

Beispiel.

Die symmetrische Gruppe S_n operiert auf dem maximalen Torus von $U(n)$ durch

$$\sigma \cdot \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \Delta(\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Ist $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine ON-Basis des $\mathbb{C}^n$ (bezüglich des kanonischen hermiteschen Skalarproduktes), so setzen wir

$$T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) := \{X \in U(n) \,:\, X \cdot \mathbf{a}_i^\top = \lambda_i \mathbf{a}_i^\top \text{ für } \lambda_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, n\}$$

und

$$ST(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) := T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \cap SU(n).$$

Dabei ist stets $|\lambda_i| = 1$ für alle i, und für die Matrizen X in $ST(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ gilt $\lambda_1 \cdots \lambda_n = 1$.

Speziell ist $T(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \{\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \,:\, \lambda_i \in S^1 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$ der schon bekannte „kanonische“ maximale Torus von $U(n)$.

Weiter gilt: Ist $X \in T(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ und $A \in U(n)$, so gibt es Elemente $\lambda_i \in S^1$, so dass gilt: $(A \cdot X \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot \mathbf{e}_i^\top) = A \cdot X \cdot \mathbf{e}_i^\top = A \cdot (\lambda_i \mathbf{e}_i^\top) = \lambda_i \cdot (A \cdot \mathbf{e}_i^\top)$, also

$$A \cdot T(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A^{-1} = T(A \cdot \mathbf{e}_1^\top, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n^\top) \text{ für } A \in U(n)$$

und

$$A \cdot ST(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A^{-1} = ST(A \cdot \mathbf{e}_1^\top, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n^\top) \text{ für } A \in SU(n).$$

Daher sind die Gruppen $T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ (bzw. $ST(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$) die maximalen Tori von $U(n)$ (bzw. $SU(n)$).

Sei nun $D = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in ST(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Wenn die Konjugation mit $A \in SU(n)$ zur Weylgruppe gehört, liegt ADA^{-1} wieder in $ST(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$; es muss also Zahlen ϱ_i geben, so dass $ADA^{-1} \cdot \mathbf{e}_i^\top = \varrho_i \mathbf{e}_i^\top$ ist, also $D \cdot (A^{-1} \cdot \mathbf{e}_i^\top) = \varrho_i (A^{-1} \cdot \mathbf{e}_i^\top)$. Da die Eigenräume von D die 1-dimensionalen Räume $\mathbb{C}\mathbf{e}_j$ und die zugehörigen Eigenwerte die Zahlen λ_j sind, muss es eine Permutation $\sigma \in S_n$ und Zahlen α_i mit $|\alpha_i| = 1$ geben, so dass $A^{-1} \cdot \mathbf{e}_i^\top = \alpha_i \mathbf{e}_{\sigma(i)}^\top$ und $\varrho_i = \lambda_{\sigma(i)}$ ist, für $i = 1, \ldots, n$.

Ist $P_\sigma := (\mathbf{e}_{\sigma(1)}^\top, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}^\top)$ die zu σ gehörende Permutationsmatrix, so ist $A^{-1} = \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot P_\sigma$, also $A = P_{\sigma^{-1}} \cdot \Delta(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$. Weil $W(G) = N_G(T)/T$ ist, liegen die Elemente von $W(G)$ in S_n.

Andererseits liegen alle Permutationen in $W(G)$:

Sei z.B. $P \cdot \mathbf{e}_1^\top = \mathbf{e}_2^\top$, $P \cdot \mathbf{e}_2^\top = \mathbf{e}_1^\top$ und $P \cdot \mathbf{e}_j^\top = \mathbf{e}_j^\top$ für $j \geq 3$. Für $D = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist dann $P \cdot D \cdot P^{-1} = \Delta(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$. Bei anderen Permutationen geht's analog.

Damit ist gezeigt: $W(SU(n)) = S_n$

Sei weiterhin G eine kompakte (zusammenhängende) Liegruppe.

Definition.
Der *Darstellungsring* $R(G)$ ist die freie abelsche Gruppe, die von den Äquivalenzklassen irreduzibler komplexer G-Moduln erzeugt wird. Die Elemente von $R(G)$ nennt man *virtuelle Darstellungen*.

Identifiziert man $[V \oplus W]$ mit $[V] + [W]$, so kann man die Menge $R^+(G)$ der Äquivalenzklassen beliebiger Darstellungen von G als Teilmenge von $R(G)$ auffassen. Sie ist abgeschlossen bezüglich Addition und der Multiplikation

$$[V] \cdot [W] := [V \otimes W] \,.$$

Ist $\varphi : R^+(G) \to A$ eine Abbildung in einen kommutativen Ring A, so dass $\varphi([V] + [W]) = \varphi([V]) + \varphi([W])$, $\varphi([V] \cdot [W]) = \varphi([V]) \cdot \varphi([W])$ und $\varphi(1) = 1$ ist[1], so gibt es einen eindeutig bestimmten Ring-Homomorphismus $\widehat{\varphi} : R(G) \to A$, so dass $\widehat{\varphi}|_{R^+(G)} = \varphi$ ist.

Definition.
Ist $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Liegruppen, so wird dadurch ein Homomorphismus $R(\varphi) : R(H) \to R(G)$ wie folgt definiert:

$$R(\varphi)([E]) := [E_\varphi], \text{ wobei } E_\varphi = E \text{ und } g \cdot v := \varphi(g) \cdot v \text{ ist.}$$

[1] Mit 1 wird hier die triviale Darstellung $G \to \mathbb{C}^*$ mit $g \cdot c = c$ bezeichnet.

3.2 Satz. *Ist $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Liegruppen und*

$$\bigcup_{x \in H} x\varphi(G)x^{-1} = H,$$

so ist $R(\varphi)$ injektiv.

BEWEIS: Es seien V, W zwei Darstellungen von H und $V_\varphi \cong W_\varphi$. Dann ist $\chi_{V_\varphi} = \chi_{W_\varphi}$. Ist $h \in H$, so gibt es ein $x \in H$ und ein $g \in G$, so dass $h = x\varphi(g)x^{-1}$ ist. Daraus folgt:

$$\chi_V(h) = \chi_V(x\varphi(g)x^{-1}) = \chi_V(\varphi(g)) = \chi_{V_\varphi}(g) = \chi_{W_\varphi} = \ldots = \chi_W(h),$$

also $V \cong W$. ∎

3.3 Folgerung. *Ist $g_0 \in G$, so ist $R(i_{g_0}) = \mathrm{id}_{R(G)}$.*

BEWEIS: Sei $\varphi := i_{g_0}$. Dann ist

$$\chi_{V_\varphi}(g) = \chi_V(\varphi(g)) = \chi_V(g_0 g g_0^{-1}) = \chi_V(g),$$

also $V_\varphi \cong V$. ∎

Beispiel.

Es ist $R(T^n) \cong \mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$. Das sieht man so:

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sei $<\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}> := \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^\top$. Jede irreduzible Darstellung von T^n hat die Gestalt

$$\varrho([\mathbf{x}])(z) = e^{2\pi \mathrm{i} <\mathbf{k}\,,\,\mathbf{x}>} \cdot z, \text{ mit } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n.$$

Für $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ bezeichne $V(k_1, \ldots, k_n)$ den Darstellungsraum $\mathbb{C}$ der oben angegebenen Darstellung ϱ. Dann liefert

$$V(k_1, \ldots, k_n) \mapsto X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$$

einen Ring-Isomorphismus von $R(T^n)$ auf $\mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$, denn wegen $e^{2\pi \mathrm{i} <\mathbf{k}\,,\,\mathbf{x}>} \cdot e^{2\pi \mathrm{i} <\mathbf{r}\,,\,\mathbf{x}>} = e^{2\pi \mathrm{i} <\mathbf{k}+\mathbf{r}\,,\,\mathbf{x}>}$ ist $V(k_1, \ldots, k_n) \otimes V(r_1, \ldots, r_n) \cong V(k_1 + r_1, \ldots, k_n + r_n)$.

Definition.

Eine Funktion $f \in \mathscr{C}^0(G, \mathbb{C})$ heißt *zentral* (oder eine *Klassenfunktion*), falls gilt: $f(xyx^{-1}) = f(y)$ für alle $x, y \in G$. Die Menge aller Klassenfunktionen wird mit $Cl(G)$ bezeichnet.

Die Menge $Cl(G)$ bildet einen Ring, der alle Charaktere von Darstellungen enthält. Ist $T \subset G$ ein maximaler Torus, so induziert die Einschränkung $f \mapsto f|_T$ einen Isomorphismus $Cl(G) \to \mathscr{C}^0(T)^W$. Dabei operiert die Weylgruppe W auf $\mathscr{C}^0(T)$ durch $w = (i_g)|_T : f \mapsto f \circ w$, und $\mathscr{C}^0(G)^W$ ist die Menge der W-invarianten stetigen Funktionen auf T. Auf einen Beweis müssen wir hier verzichten.

Äquivalenzklassen von Darstellungen kann man durch Charaktere, also durch Klassenfunktionen beschreiben. In diesem Sinne operiert die Weylgruppe auch auf $R(T)$. Dann gilt:

3.4 Satz. *Ist $T \subset G$ ein maximaler Torus und $W = W_T(G)$ die Weylgruppe, so ist die Abbildung $R(G) \to R(T)^W$ (induziert von $\pi \mapsto \pi|_T$) ein Monomorphismus.*

Dieser Satz hilft sehr bei der Bestimmung von Darstellungsringen (zum Beweis vgl. [Brö-tDie]).

Beispiele.

1. Wir wollen die Darstellungsringe von $U(n)$ und $SU(n)$ bestimmen. Es sei $T^n = \{\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : |\lambda_i| = 1\}$ der maximale Torus von $U(n)$, $ST^n := T^n \cap SU(n)$.

   Zur Erinnerung: Ist $\pi_k : T^n \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ definiert durch $\pi_k(\Delta(\boldsymbol{\lambda}))(z) = e^{\mathrm{i}\,\lambda_k} \cdot z$, so ist

   $$R(T^n) \cong \mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}], \text{ mit } [\pi_k] \mapsto X_k,\ k = 1, \dots, n.$$

   Die Weylgruppe von $U(n)$ ist die symmetrische Gruppe S_n. Sie operiert auf T^n durch
   $$\sigma^{-1} \cdot \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Delta(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}).$$
   Also ist $R(U(n))$ ein Unterring von $R(T^n)^W = \mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]^{S_n}$, wobei die Permutationen $\sigma \in S_n$ die X_i untereinander vertauschen. Das bedeutet, dass die Elemente von $R(T^n)^W$ symmetrische Polynome in X_i und X_i^{-1} mit ganzzahligen Koeffizienten sind.

   Bekanntlich kann man jedes symmetrische Polynom aus $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ auf eindeutige Weise als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ schreiben:

   $$\begin{aligned} \sigma_1(X_1, \dots, X_n) &= X_1 + \cdots + X_n, \\ \sigma_2(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{\nu<\mu} X_\nu X_\mu, \\ &\ \vdots \\ \sigma_n(X_1, \dots, X_n) &= X_1 \cdots X_n\,. \end{aligned}$$

   Ist $f \in R(T^n)^W$, so gibt es ein minimales N und ein symmetrisches Polynom g, so dass gilt:

$$f(X_1,\dots,X_n) = \frac{1}{(X_1\cdots X_n)^N}\cdot g(X_1,\dots,X_n).$$

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $P_g \in \mathbb{Z}[Y_1,\dots,Y_n]$, so dass gilt:

$$g(X_1,\dots,X_n) = P_g(\sigma_1(X_1,\dots,X_n),\dots,\sigma_n(X_1,\dots,X_n)).$$

Mit $\sigma_i(X_1,\dots,X_n) \leftrightarrow Y_i$ erhält man so eine eindeutige Zuordnung

$$f(X_1,\dots,X_n) \mapsto \frac{1}{Y_n^N}\cdot P_g(Y_1,\dots,Y_n) \in \mathbb{Z}[Y_1,\dots,Y_n,Y_n^{-1}]$$

und damit eine Bijektion

$$\mathbb{Z}[X_1,X_1^{-1},\dots,X_n,X_n^{-1}]^{S_n} \cong \mathbb{Z}[Y_1,\dots,Y_n,Y_n^{-1}].$$

Sei $\lambda_1 : U(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ die Standard-Darstellung und $\lambda_k := \bigwedge^k \lambda_1$. Offensichtlich ist $\lambda_1|_T = \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_n \mathrel{\widehat{=}} X_1 + \cdots + X_n \in R(T)$. Damit ist

$$\lambda_k|_T = \bigwedge^k \bigoplus_{\nu=1}^n \pi_\nu \cong \bigoplus_{i_1<\ldots<i_k} \pi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\pi_{i_k} \mathrel{\widehat{=}} \sum_{i_1<\ldots<i_k} X_{i_1}\cdots X_{i_k} \in R(T^n).$$

(Wir verwenden hier einen Satz aus der linearen Algebra ohne Beweis). So erhalten wir alle Y_i in $R(U(n))$. Weil $\lambda_n(A)\mathbf{z} = \det(A)\cdot\mathbf{z}$ und $\det(A)$ invertierbar ist, kommt auch λ_n^{-1}, also Y_n^{-1} vor. Damit ist gezeigt:

$$R(U(n)) = \mathbb{Z}[Y_1,\dots,Y_n,Y_n^{-1}],\ \text{mit } [\lambda_k] \mathrel{\widehat{=}} Y_k.$$

Im Falle der Gruppe $SU(n)$ ist $\pi_1\cdots\pi_n = 1$, also $Y_n =$ (Bild von $X_1\cdots X_n = \sigma_n(X_1,\dots,X_n) =$)1. Deshalb entfallen hier Y_n und Y_n^{-1}, und es gilt:

$$R(SU(n)) = \mathbb{Z}[Y_1,\dots,Y_{n-1}],\ \text{mit } [\lambda_k] \mapsto \begin{cases} Y_k & \text{für } k<n \\ 1 & \text{für } k=n. \end{cases}$$

2. Wir kommen nun zu den orthogonalen Gruppen. Als maximale Tori benutzen wir

$$T = \{R(\mathbf{t}) = \Delta(R(t_1),\dots,R(t_n)) \,:\, t_i \in \mathbb{R}\}\ \text{(im Falle } SO(2n))$$

und

$$T^* = \{R^*(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} R(\mathbf{t}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, \mathbf{t}\in\mathbb{R}^n\}\ \text{(im Falle } SO(2n+1)).$$

Sei $G(n)$ die Menge der Permutationen von $\{-n,\dots,-1,1,\dots,n\}$, für die gilt: $\sigma(-\nu) = -\sigma(\nu)$ für alle ν. Die Zusatzbedingung bedeutet, dass stets $\{\sigma(\nu),\sigma(-\nu)\} = \{\mu,-\mu\}$ ist. Man hat dann eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^n \xrightarrow{\alpha} G(n) \xrightarrow{\beta} S_n \longrightarrow 1$$

mit $\alpha(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) := (\mu \mapsto \varepsilon_\mu \cdot \mu)$ und $\beta(\sigma)(\nu) := |\sigma(\nu)|$. Zu β gibt es einen „Schnitt“ $s : S_n \to G(n)$ mit $\sigma \mapsto s_\sigma$ und $s_\sigma(\nu) := \begin{cases} \sigma(\nu) & \text{falls } \nu > 0 \\ -\sigma(-\nu) & \text{sonst} \end{cases}$

Sei $\theta : S_n \to \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}_2)^n)$ gegeben durch $\theta(\sigma)(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) := (\varepsilon_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \varepsilon_{\sigma^{-1}(n)})$. Dann kann man zeigen, dass $(\mathbb{Z}_2)^n \times_\theta S_n \cong G(n)$ ist, vermöge $(\boldsymbol{\varepsilon}, \sigma) \mapsto \alpha(\boldsymbol{\varepsilon}) \circ s_\sigma$ (zur Definition des *semidirekten Produktes* $(\mathbb{Z}_2)^n \times_\theta S_n = (\mathbb{Z}_2)^n \times S_n$, mit $(\boldsymbol{\varepsilon}, \sigma) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}', \sigma') := (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \theta(\sigma)(\boldsymbol{\varepsilon}'), \sigma\sigma')$, vgl. Anhang F).

Es sei $SG(n)$ das Bild von $\{(\boldsymbol{\varepsilon}, \sigma) \in (\mathbb{Z}_2)^n \times_\theta S_n \,:\, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = 1\}$ in $G(n)$ unter dem obigen Isomorphismus.

Man kann zeigen, dass $SG(n) = W(SO(2n))$ und $G(n) = W(SO(2n+1))$ ist. Dabei operiert $SG(n)$ auf T durch

$$\sigma^{-1}(R(t_1, \ldots, t_n)) = R(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}), \text{ mit } R(t_{-\nu}) := R(-t_\nu).$$

Im Falle der Gruppe $SO(2)$ ist $T = G = SO(2)$ und $W(G) = N_G(T)/T = \{1\}$. Andererseits ist $SG(1) \cong \{(\varepsilon, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times S_1 \,:\, \varepsilon = 1\}$, also $SG(1) = \{1\}$.

Sei nun $G = SO(2n)$ oder $SO(2n+1)$, mit beliebigem n. Die Elemente $R(t_1, \ldots, t_n)$ des maximalen Torus haben die Eigenwerte $e^{\pm \mathrm{i}\, t_\nu}$. Konjugation mit einem Element $A \in G$ ändert daran nichts. Da man die Elemente des Torus so wählen kann, dass die t_ν paarweise verschieden sind, muss $W(G)$ in $G(n)$ enthalten sein. Im Falle $G = SO(2n)$ nehmen wir an, dass $\gamma := ((-1, 1, \ldots, 1), \mathrm{id})$ in $W(G)$ liegt. Dann gibt es ein $A \in G$, so dass $A \cdot R(t_1, \ldots, t_n) \cdot A^{-1} = R(-t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ist. Andererseits liefert die Konjugation mit $H = \Delta(-1, 1, \ldots, 1, -1) \in SO(2n+1)$ das gleiche Ergebnis. Sei $A^* := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2n+1)$. Dann ergibt die Konjugation mit $(A^*)^{-1} \cdot H$ auf T^* die Identität. Also liegt $(A^*)^{-1} \cdot H$ in $Z_G(T) = T$ und damit im Bild von $SO(2n)$ in $SO(2n+1)$. Dann muss auch H dort liegen, aber das stimmt nicht. Demnach war die Annahme falsch, und $W(SO(2n))$ liegt sogar in $SG(n)$.

Umgekehrt zeigt man leicht, dass $G(n) \subset W(SO(2n+1))$ und $SG(n) \subset W(SO(2n))$ ist.

Wir bestimmen jetzt den Darstellungsring von $SO(2n+1)$ in mehreren Schritten.

a) Für jedes $q \in \mathbb{N}$ gibt es ein Polynom $f_q(Y) \in \mathbb{Z}[Y]$ mit $X^q + X^{-q} = f_q(X + X^{-1})$.

Beweis: Man setze $f_1(Y) := Y$, $f_2(Y) := Y^2 - 2$ und $f_{q+1}(Y) := f_1(Y) f_q(Y) - f_{q-1}(Y)$.

b) Ist $f \in \mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$ invariant unter allen Transformationen $X_i \to X_i^{-1}$, so ist $f \in \mathbb{Z}[X_1 + X_1^{-1}, \ldots, X_n + X_n^{-1}]$.

BEWEIS: Ist $f(X) = \sum_{-N}^{M} a_m X^m \in \mathbb{Z}[X, X^{-1}]$ und $f(X) = f(X^{-1})$, so sieht man sofort, dass $f(X) = \sum_m a_m f_m(X+X^{-1}) \in \mathbb{Z}[X+X^{-1}]$ ist. Bei mehreren Variablen kann man für jede einzelne Variable so argumentieren.

c) Sei $f \in \mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$ invariant unter allen Transformationen $X_i \to X_i^{-1}$ und unter S_n (d.h. Vertauschung der X_i). Dann gibt es ein Polynom $P_f(Z_1, \ldots, Z_n)$, so dass gilt:

$$f(X_1, \ldots, X_n) = P_f(\sigma_1(X_1 + X_1^{-1}, \ldots, X_n + X_n^{-1}), \ldots, \sigma_n(X_1 + X_1^{-1}, \ldots)).$$

Zum BEWEIS benutzt man den Hauptsatz über symmetrische Polynome.

d) Sei λ_i die Darstellung von $SO(2n+1)$ auf $(\bigwedge^i \mathbb{R}^{2n+1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Wegen der Injektion $R(SO(2n+1)) \hookrightarrow R(T^*)^W$ erhält man wie bei den unitären Gruppen eine Zuordnung

$$\lambda_k \mapsto \Sigma_k(X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}, 1),$$

wobei $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{2n+1}$ die elementarsysmmetrischen Polynome in $2n+1$ Variablen sind.

Sei nun $Z_i = \sigma_i(X_1 + X_1^{-1}, \ldots, X_n + X_n^{-1})$. Dann ist

$$\begin{aligned} [\lambda_1] &= X_1 + X_1^{-1} + \cdots + X_n + X_n^{-1} + 1 \\ &= \sigma_1(X_1 + X_1^{-1}, \ldots, X_n + X_n^{-1}) + 1 \\ &= Z_1 + 1, \end{aligned}$$

$[\lambda_2] = Z_2 + Z_1 + 1$ und allgemein $[\lambda_k] = Z_k + \sum_{i<k} n_{ik} Z_i$, mit $n_{ik} \in \mathbb{Z}$.

Der $*$-Operator liefert einen $SO(2n+1)$-invarianten Isomorphismus

$$* : \bigwedge^k \mathbb{R}^{2n+1} \to \bigwedge^{2n+1-k} \mathbb{R}^{2n+1}$$

(mit $\mathbf{e}_I \wedge (*\mathbf{e}_I) = \operatorname{sign}(I, J)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2n+1}$, wobei $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, $\mathbf{e}_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ und $J = \{1, \ldots, 2n+1\} \setminus I$ ist).

Bezeichnen wir das Bild von $[\lambda_k]$ in $\mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_n]$ mit Y_k, so ist

$$R(SO(2n+1)) = \mathbb{Z}[Y_1, \ldots, Y_n].$$

Sei $\mathfrak{a}$ eine Liealgebra über k, E ein n-dimensionaler k-Vektorraum und $\varrho : \mathfrak{a} \to \operatorname{End}(E)$ ein Homomorphismus von Liealgebren. Dann wird durch

$$B_\varrho(u, v) := \operatorname{Spur}(\varrho(u) \circ \varrho(v))$$

eine symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{a}$ definiert (die Bilinearität ist klar, und außerdem ist stets $\mathrm{Spur}(X \cdot Y) = \mathrm{Spur}(Y \cdot X)$).

Behauptung: $B_\varrho(\mathrm{ad}(w)u, v) + B_\varrho(u, \mathrm{ad}(w)v) = 0$.

BEWEIS: Wegen $\varrho([u,v]) = \varrho(u) \circ \varrho(v) - \varrho(v) \circ \varrho(u)$ gilt:

$$\begin{aligned}
B_\varrho(\mathrm{ad}(w)u, v) &= \mathrm{Spur}(\varrho([w,u]) \circ \varrho(v)) \\
&= \mathrm{Spur}(\varrho(w) \circ \varrho(u) \circ \varrho(v)) - \mathrm{Spur}(\varrho(u) \circ \varrho(w) \circ \varrho(v)) \\
&= \mathrm{Spur}(\varrho(w) \circ \varrho(u) \circ \varrho(v)) - \mathrm{Spur}(\varrho(u) \circ \varrho(w) \circ \varrho(v)) \\
&= \mathrm{Spur}(\varrho(u) \circ \varrho(v) \circ \varrho(w)) - \mathrm{Spur}(\varrho(u) \circ \varrho(w) \circ \varrho(v)) \\
&= \mathrm{Spur}(\varrho(u) \circ \varrho([v,w])) \;=\; -\,\mathrm{Spur}(\varrho(u) \circ \varrho([w,v])) \\
&= -B_\varrho(u, \mathrm{ad}(w)v).
\end{aligned}$$

∎

Definition.

Unter der *Killing-Form* von G (oder von $\mathfrak{g} = L(G)$) versteht man die Bilinearform $B = B_{\mathrm{ad}}$ auf $L(G)$ mit $B(u,v) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}(u) \circ \mathrm{ad}(v))$.

3.5 Satz. *Ist σ ein Automorphismus der Liealgebra $L(G)$, so ist $B(\sigma(u), \sigma(v)) = B(u,v)$, für alle $u, v \in L(G)$.*

BEWEIS: Es ist $\sigma \circ \mathrm{ad}(u)(v) = \sigma([u,v]) = [\sigma(u), \sigma(v)] = \mathrm{ad} \circ \sigma(u) \circ \sigma(v)$, also $B(\sigma(u), \sigma(v)) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}(\sigma(u)) \circ \mathrm{ad}(\sigma(v))) = \mathrm{Spur}(\sigma \circ \mathrm{ad}(u) \circ \mathrm{ad}(v) \circ \sigma^{-1}) = B(u,v)$.

∎

Ein Spezialfall ist $\mathrm{Ad}(g) = I'_g \in \mathrm{Aut}(L(G))$. Also ist auch

$$B(\mathrm{Ad}(g)u, \mathrm{Ad}(g)v) = B(u,v), \text{ für alle } g \in G,\; u, v \in L(G).$$

Definition.

Eine kompakte zusammenhängende Liegruppe G heißt *halbeinfach*, falls die Killing-Form nicht entartet ist.

Sei G im Folgenden eine halbeinfache kompakte Liegruppe und $T \subset G$ ein maximaler Torus, $W = W(G)$ die Weylgruppe. Als Untergruppe von $\mathrm{Aut}(T)$ operiert W auf T. Für jedes $g \in G$ und $w := I_g|_T \in W$ hat man folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & T & \xrightarrow{w} & T & \\
\mathrm{Ad} & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{Ad} \\
 & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{I_{\mathrm{Ad}(g)}} & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) &
\end{array}$$

Denn: Da Ad ein Homomorphismus ist, ist

$$I_{\mathrm{Ad}(g)} \circ \mathrm{Ad}(h) = \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h) \circ \mathrm{Ad}(g)^{-1} = \mathrm{Ad}(ghg^{-1}) = \mathrm{Ad} \circ w(h).$$

Das bedeutet, dass die Darstellungen Ad und $\mathrm{Ad} \circ w$ von T auf $L(G)$ äquivalent sind. Da Gewichte (als Charaktere) nur von der Äquivalenzklasse einer Darstellung abhängen, folgt:

3.6 Satz. *Die Weylgruppe $W(G)$ permutiert die Wurzeln von G.*

Differenzieren liefert eine Operation von $W(G)$ auf $\mathfrak{t} = L(T)$ und die Äquivalenz der Darstellungen ad und $\mathrm{ad} \circ w'$ von $\mathfrak{t}$ auf $L(G)$. Also permutiert die Weylgruppe auch die infinitesimalen Wurzeln. Ist $w = I_g|_T \in W$ und $u \in \mathfrak{t}$, so ist $w \cdot u = \mathrm{Ad}(g)(u)$. Nun operiert $W(G)$ auch auf dem Dualraum $\mathfrak{t}^*$ durch

$$w(\lambda)(u) := \lambda(w^{-1} \cdot u), \text{ für } w \in W,\ \lambda \in \mathfrak{t}^* \text{ und } u \in \mathfrak{t}.$$

Zur Erinnerung: Die infinitesimalen Wurzeln haben die Gestalt $\alpha = 2\pi\mathsf{i}\,\lambda$ mit $\lambda \in \mathfrak{t}^*$. Man nennt dann λ auch eine *reelle Wurzel*. Die komplexe Linearform $\alpha^c : L(T) \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\alpha^c(u \otimes z) = z \cdot \alpha(u)$ nennt man *komplexe Wurzel*.

Die Killingform setzt sich zu einer nicht entarteten symmetrischen Bilinearform auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ fort. Dann erhält man einen Isomorphismus $\kappa : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ mit $\kappa(v)(w) := B(w, v)$. Für eine (infinitesimale) Wurzel α sei

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{v \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \,:\, [h, v] = \alpha(h)v \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Ist $B(v, w) = 0$, so schreiben wir: $v \perp w = 0$.

3.7 Satz. *Es ist $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Ist $\alpha + \beta \neq 0$, so ist $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$.*

Beweis: Aus der Jacobi-Identität folgt für $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_\beta$:

$$\mathrm{ad}(h)[x, y] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = (\alpha(h) + \beta(h)) \cdot [x, y], \text{ also } [x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

Dann ist $\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)(\mathfrak{g}_\gamma) \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}$. Weil $\alpha + \beta \neq 0$, also $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma} \cap \mathfrak{g}_\gamma = \{0\}$ ist, ist $\mathrm{Spur}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)) = 0$, d.h. $x \perp y$. ∎

Bemerkung. Der Satz bleibt für beliebige Gewichte richtig, d.h. auch für $\beta = 0$ und $\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{h}$.

Sei $\Delta = \Delta_G$ die Menge der (infinitesimalen) Wurzeln von G. Für $\alpha \in \Delta$ sei $h_\alpha := \kappa^{-1}(\alpha)$.

3.8 Satz. *Mit α ist auch $-\alpha \in \Delta$. Ist $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, so ist $[x, y] = B(x, y) \cdot h_\alpha$.*

Beweis: Wäre $-\alpha \notin \Delta$, so wäre $\alpha + \beta \neq 0$ für alle $\beta \in \Delta$ und daher $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Das kann nicht sein, weil B nicht entartet ist.

Nach dem vorigen Satz ist $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$. Für $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ist

$$\begin{aligned} B(h,[x,y]) \;=\; B(h,\mathrm{ad}(x)y) &= -B(\mathrm{ad}(x)h,y) \;=\; B(\mathrm{ad}(h)x,y) \\ &= \alpha(h)\cdot B(x,y) \\ &= B(h,h_\alpha)\cdot B(x,y) \\ &= B(h,B(x,y)\cdot h_\alpha). \end{aligned}$$

Also ist $[x,y] = B(x,y)\cdot h_\alpha$. ∎

Bemerkung. Die Elemente x, y, h_α spannen eine Liealgebra auf, die wie $\mathfrak{su}(2)$ aussieht. Das spielt eine wichtige Rolle bei der Behandlung allgemeiner Wurzelsysteme.

3.9 Satz. *Sei G kompakt und halbeinfach. Dann ist die Killing-Form auf $\mathfrak{g}$ negativ-definit.*

Beweis: Zu der Darstellung $\mathrm{ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ gibt es ein invariantes Skalarprodukt $<\ldots,\ldots>$ auf $\mathfrak{g}$. O.B.d.A. kann man also annehmen, dass $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$, $G = O(n)$ und $<\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}> = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^\top$ ist. Für $w \in \mathfrak{g}$ ist dann

$$<\mathrm{ad}(w)\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}> + <\mathbf{u}\,,\,\mathrm{ad}(w)\mathbf{v}> = 0.$$

Also wird $\mathrm{ad}(v)$ durch eine schiefsymmetrische Matrix $A = (a_{ij})$ beschrieben. Dann ist

$$\begin{aligned} B(w,w) &= \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}(w)\circ\mathrm{ad}(w)) \;=\; \mathrm{Spur}(A\cdot A) \\ &= -\,\mathrm{Spur}(A\cdot A^\top) \;=\; -\sum_{i,j} a_{ij}^2 \;\le\; 0. \end{aligned}$$

Weil B nicht entartet ist, ist B sogar negativ definit. ∎

Ist $\alpha = 2\pi\,\mathsf{i}\,\lambda : L(T) \to \mathsf{i}\,\mathbb{R}$ eine infinitesimale Wurzel, so gibt es genau eine (globale) Wurzel $\varrho = \varrho_\alpha : T \to U(1)$ mit $\varrho' = \alpha$. Dann ist $U_\alpha := \mathrm{Ker}(\varrho_\alpha)$ eine abgeschlossene Untergruppe, und $L(U_\alpha) = \mathrm{Ker}(\alpha) =: H_\alpha$ ist eine Hyperebene in $L(T)$. Insbesondere ist $\dim(U_\alpha) = \dim(T) - 1$. U_α ist natürlich abelsch und kompakt, i.a. aber nicht zusammenhängend. Die Zusammenhangskomponente der 1 ist dann ein Torus (bezeichnet mit U_α^0), und U_α selbst ist monogen.

3.10 Satz. *Es ist $Z(G) = \bigcap_{\alpha\in\Delta_G} U_\alpha$.*

Beweis: a) Ist $x \in Z(G)$, so ist $\mathrm{Ad}(x) = \mathrm{id}_{L(G)}$, also $\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}(h)) = \mathrm{Ad}(\exp(h)) = \mathrm{id}_{L(G)}$ und daher $\mathrm{ad}(h) = 0$, wenn $x = \exp(h)$ ist. Daraus folgt, dass $\alpha(h) = 0$ sein muss, für alle $\alpha \in \Delta_G$, also $\varrho(x) = \varrho(\exp(h)) = \exp(\alpha(h)) = e$, d.h. $x \in U_\alpha$, für alle α.

b) Liegt umgekehrt x im Durchschnitt aller U_α, so folgt - wie oben, nur in umgekehrter Reihenfolge - dass $\mathrm{Ad}(x) = \mathrm{id}_{L(G)}$ ist. Das ist nur möglich, wenn $I_x = \mathrm{id}$ ist, also $x \in Z(G)$. ∎

Beispiel.

Sei $G = U(n)$, also $T = \{\Delta(z_1, \ldots, z_n) \,:\, z_\nu \in \mathbb{C}$ mit $|z_\nu| = 1\}$. Die Wurzeln sind $\alpha_{\nu\mu} := \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu$, für $\nu \neq \mu$. Sei $\varrho_{\nu\mu}(\exp(u)) := \exp(\alpha_{\nu\mu}(u))$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta(e^{\mathrm{i}\,t_1}, \ldots, e^{\mathrm{i}\,t_n}) \in Z(U(n)) \quad &\iff \quad \varrho_{\nu\mu}(\exp(\Delta(\mathrm{i}\,t_1, \ldots, \mathrm{i}\,t_n))) = 1 \text{ für } \nu \neq \mu,\\
&\iff \quad \alpha_{\nu\mu}(\Delta(\mathrm{i}\,t_1, \ldots, \mathrm{i}\,t_n)) = 0 \text{ für } \nu \neq \mu,\\
&\iff \quad t_\nu = t_\mu \text{ für } \nu \neq \mu
\end{aligned}$$

Damit ist $Z(U(n)) = \{e^{\mathrm{i}\,t} \cdot E_n \,:\, t \in \mathbb{R}\} \cong S^1$.

Im Falle $G = SU(n)$ ist

$$T = \{\Delta(z_1, \ldots, z_n) \,:\, z_\nu \in \mathbb{C} \text{ mit } |z_\nu| = 1 \text{ und } z_1 \cdots z_n = 1\}.$$

Dann ist $Z(SU(n)) = \{e^{\mathrm{i}\,t} \cdot E_n \,:\, t \in \mathbb{R} \text{ und } nt \in 2\pi\mathbb{Z}\} \cong \{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, \zeta^n = 1\}$ die Menge der n-ten Einheitswurzeln.

Wir versehen nun $L(T)$ mit dem (positiv definiten) Skalarprodukt

$$(v, w) := -B(v, w).$$

Das liefert insbesondere einen Isomorphismus $\kappa : L(T) \to L(T)^*$, durch $\kappa(v)(w) := (v, w)$.

Fortan wollen wir unter einer ***Wurzel*** immer eine ***reelle infinitesimale Wurzel*** verstehen.

Insbesondere nehmen wir folgenden Notationswechsel vor: Während wir bisher mit α eine infinitesimale Wurzel der Gestalt $\alpha = 2\pi\mathrm{i}\,\lambda$ (mit einer Linearform $\lambda \in L(T)^*$ mit $\lambda(\Gamma_T) \subset \mathbb{Z}$) bezeichnet haben, verstehen wir im Rest dieses Paragraphen unter α schon die reelle infinitesimale Wurzel λ.

Das ändert nichts an den Gruppen U_α und den Hyperebenen H_α. Allerdings ist die zu α gehörende globale Wurzel jetzt gegeben durch $\varrho(\exp(h)) = e^{2\pi\mathrm{i}\,\alpha(h)}$.

Wir definieren $h_\alpha \in L(T)$ durch $(h_\alpha, x) = \alpha(x)$ und erklären auch noch ein Skalarprodukt auf $L(T)^*$ durch

$$<\alpha\,,\,\beta> := (h_\alpha, h_\beta).$$

So können wir Längen von Wurzeln und Winkel zwischen Wurzeln berechnen. Offensichtlich ist h_α orthogonal zu H_α und $|h_\alpha| = |\alpha|$.

Es sei Δ die Menge der Wurzeln von G. Für $\alpha \in \Delta$ sei s_α die orthogonale Spiegelung an H_α, gegeben durch

$$s_\alpha(x) := x - \frac{2\alpha(x)}{<\alpha\,,\,\alpha>}\, h_\alpha = x - 2(x, \widetilde{h}_\alpha)\widetilde{h}_\alpha, \text{ für } x \in L(T).$$

Dabei sei $\widetilde{h}_\alpha := h_\alpha/|h_\alpha|$. Dann ist $|\widetilde{h}_\alpha| = 1$, $s_\alpha(\widetilde{h}_\alpha) = -\widetilde{h}_\alpha$ und $s_\alpha(x) = x$ für $x \in H_\alpha$.

Ist $w \in W(G)$, so gibt es ein $g \in N_G(T)$ mit $w = I_g|_T$. Dann operiert w auf $L(T)$ durch $w \cdot u = \mathrm{Ad}(g)(u)$ und auf $L(T)^*$ durch $(w \cdot \lambda)(v) = \lambda(w^{-1}v)$.

Auf $L(T)$ ist $(w \cdot u, w \cdot v) = (u, v)$ für $w \in W(G)$, weil die Killing-Form Ad-invariant ist.

Behauptung: $\kappa(w \cdot u) = w \cdot (\kappa(u))$ für $w \in W$ und $u \in L(T)$.

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned}\kappa(w \cdot u)(v) &= (w \cdot u, v)\\ &= (u, w^{-1} \cdot v) \;=\; \kappa(u)(w^{-1} \cdot v)\\ &= (w \cdot \kappa(u))(v).\end{aligned}$$

■

Daher ist

$$\begin{aligned}<w \cdot \lambda\,,\, w \cdot \mu> &= (\kappa^{-1}(w \cdot \lambda), \kappa^{-1}(w \cdot \mu))\\ &= (w \cdot \kappa^{-1}(\lambda), w \cdot \kappa^{-1}(\mu))\\ &= (\kappa^{-1}(\lambda), \kappa^{-1}(\mu)) \;=\; <\lambda\,,\,\mu>.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass W als Gruppe von Isometrien auf $L(T)^*$ wirkt.

Man kann zeigen, dass es zu jeder Wurzel α ein $r_\alpha \in N_G(T)$ gibt, so dass die Konjugation mit r_α ein Element $w_\alpha \in W(G)$ ergibt, so dass gilt:

1. w_α lässt die Elemente von U_α fest und operiert auf T/U_α durch $t \mapsto t^{-1}$
2. $w_\alpha(\exp(h)) = \exp(s_\alpha(h))$ für $h \in \mathfrak{t}$ (d.h., w_α induziert auf $L(T)$ die orthogonale Spiegelung an der Hyperebene H_α).

Der Beweis ist etwas verzwickt, mehr Details finden sich in Anhang G.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}w_\alpha \cdot \lambda = \lambda \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda(w_\alpha^{-1} z) = \lambda(z) \text{ für alle } z \in L(T)\\ &\Longleftrightarrow \quad <w_\alpha^{-1} z\,,\, \kappa^{-1}(\lambda)> = <z\,,\, \kappa^{-1}(\lambda)> \text{ für } z \in L(T)\\ &\Longleftrightarrow \quad <z\,,\, w_\alpha \cdot \kappa^{-1}(\lambda)> = <z\,,\, \kappa^{-1}(\lambda)> \text{ für } z \in L(T)\\ &\Longleftrightarrow \quad w_\alpha \cdot \kappa^{-1}(\lambda) = \kappa^{-1}(\lambda)\,.\end{aligned}$$

Also lässt w_α in $L(T)^*$ genau die zu α orthogonale Hyperebene $\kappa(H_\alpha)$ punktweise fest. Damit ergibt w_α auf $L(T)^*$ die orthogonale Spiegelung s_α^*, mit

$$s_\alpha^*(\lambda) := \lambda - \frac{2<\alpha\,,\,\lambda>}{<\alpha\,,\,\alpha>}\,\alpha \text{ für } \lambda \in L(T)^*.$$

3.11 Satz. *Sind α und β zwei Wurzeln, so ist auch $s_\alpha^*(\beta)$ eine Wurzel.*

BEWEIS: Bekanntlich permutiert die Weylgruppe die Wurzeln. Weil $w_\alpha = s_\alpha^*$ auf $L(T)^*$ ist, folgt die Behauptung. ∎

3.12 Satz. *Für je zwei Wurzeln α, β liegen die Zahlen $n_{\alpha\beta} := \frac{2<\alpha\,,\beta>}{<\alpha\,,\alpha>}$ in $\mathbb{Z}$.*

BEWEIS: Sei $u := \frac{1}{<\alpha\,,\alpha>} h_\alpha \in L(T)$ und $x := \exp(u) \in T$. Es ist $\alpha(u) = 1$, also auch $\varrho_\alpha(x) = e^{2\pi \mathrm{i}\, \alpha(u)} = 1$ und $x \in U_\alpha$. Dann ist $w_\alpha(x) = x$, also

$$\exp(u - s_\alpha(u)) = x \cdot (w_\alpha(x))^{-1} = 1 \text{ und } u - s_\alpha(u) \in \operatorname{Ker}(\exp) = \Gamma_T.$$

Das bedeutet, dass $\beta(u - s_\alpha(u)) \in \mathbb{Z}$ ist. Es ist aber

$$\beta(u - s_\alpha(u)) = \beta(u) - \beta(u) + \frac{2\alpha(u)}{<\alpha\,,\,\alpha>}\,\beta(h_\alpha) = \frac{2<\alpha\,,\,\beta>}{<\alpha\,,\,\alpha>}\,.$$

∎

Bemerkung. Es ist $n_{\alpha,-\beta} = -n_{\alpha,\beta}$. Da mit β auch $-\beta$ eine Wurzel ist, kann man β so wählen, dass $-n_{\alpha\beta} \geq 0$ ist.

3.13 Satz. *Es seien α, β zwei Wurzeln, $\alpha \neq \pm\beta$. Dann gilt:*

1. *Ist $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq k \leq -n_{\alpha\beta}$, so ist $\beta + k\alpha$ wieder eine Wurzel.*
2. *Entweder ist*

   a) α orthogonal zu β

   oder b) $\angle(\alpha, \beta) = 60^\circ$ oder $= 120^\circ$, und $|\alpha| = |\beta|$,

   oder c) $\angle(\alpha, \beta) = 45^\circ$ oder $= 135^\circ$, und $|\beta|/|\alpha| = \sqrt{2}$,

   oder d) $\angle(\alpha, \beta) = 30^\circ$ oder $= 150^\circ$, und $|\beta|/|\alpha| = \sqrt{3}$

BEWEIS: Sei $\omega := \angle(\alpha, \beta)$. Dann ist

$$0 \leq \cos(\omega)^2 = \frac{<\alpha\,,\,\beta>^2}{<\alpha\,,\,\alpha> \cdot <\beta\,,\,\beta>} < 1,$$

also

$$0 \leq \left(\frac{-2<\alpha\,,\,\beta>}{<\alpha\,,\,\alpha>}\right) \cdot \left(\frac{-2<\beta\,,\,\alpha>}{<\beta\,,\,\beta>}\right) = (-n_{\alpha\beta})(-n_{\beta\alpha}) < 4.$$

Indem man notfalls das Vorzeichen von α ändert, kann man o.B.d.A. annehmen, dass $<\alpha\,,\,\beta> \leq 0$ ist.

Ist $<\alpha\,,\,\beta> = 0$, so folgt (1) trivial. Außerdem ist damit der Fall (2a) erledigt.

Sei nun $<\alpha\,,\,\beta> \neq 0$, $n = -n_{\alpha\beta}$ und $m = -n_{\beta\alpha}$. Weil $1 \leq nm \leq 3$ ist, muss $n = 1$ oder $m = 1$ sein. Ist $n = 1$, so ist

$$s_\alpha^*(\beta) = \beta - n_{\alpha\beta}\,\alpha = \alpha + \beta$$

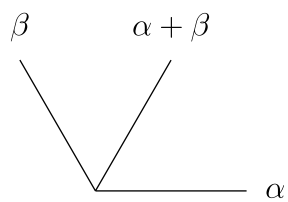
Damit folgt (1) auch in diesem Fall. Da (2) symmetrisch in α und β ist, können wir annehmen, dass $m = 1$ ist. Dann sind drei Fälle zu unterscheiden: $n = 1, 2, 3$. Es ist

$$\frac{<\beta\,,\,\beta>}{<\alpha\,,\,\alpha>} = \frac{n}{m} = n = \frac{-2<\alpha\,,\,\beta>}{<\alpha\,,\,\alpha>}\,,\ \text{also}\ |\beta|/|\alpha| = \sqrt{n}$$

und

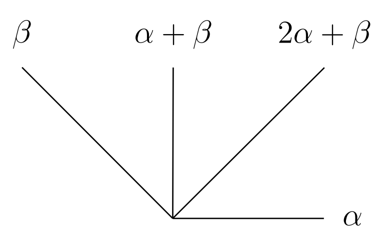
$$\cos(\omega)^2 = \frac{<\alpha\,,\,\beta>^2}{|\alpha|^2|\beta|^2} = \frac{<\alpha\,,\,\beta>^2}{\left(-\frac{2}{n}<\alpha\,,\,\beta>\right)\left(-2<\alpha\,,\,\beta>\right)} = \frac{n}{4}\,,\ \text{also}\ \cos(\omega) = \frac{\sqrt{n}}{2}\,.$$

1. Fall: Ist $n = 1$, so folgt (2b). Die Aussage (1) ist für diesen Fall schon bewiesen.



2. Fall: Ist $n = 2$, so folgt (2c). Weiter ist

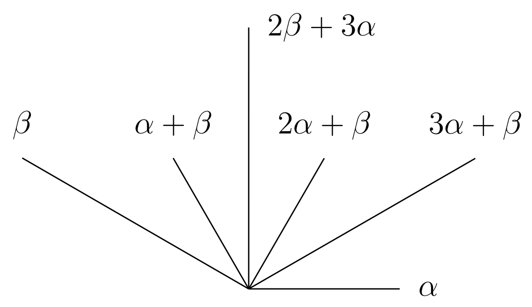
$$s_\beta^*(\alpha) = \beta + m\alpha = \alpha + \beta \ \text{und}\ s_\alpha^*(\beta) = \alpha + n\beta = \alpha + 2\beta.$$



3. Fall: Ist $n = 3$, so folgt (2d). Weiter ist

$$s_\beta^*(\alpha) = \alpha + \beta, \quad s_\alpha^*(\beta) = \beta + 3\alpha \ \text{und}\ s_\alpha^*(\beta + \alpha) = \beta + 2\alpha.$$

Außerdem erhält man die Wurzel $2\beta + 3\alpha$, wenn man $3\alpha + \beta$ an der zu β orthogonalen Hyperebene spiegelt (d.h.: $s_\beta^*(3\alpha + \beta) = 3\alpha + 2\beta$). Alle weiteren Spiegelungen ergeben die schon betrachteten Wurzeln (oder deren Negative).



Damit ist alles gezeigt. ∎

Jede Wurzel α definiert eine Hyperebene $H_\alpha = \{x \in L(T) : \alpha(x) = 0\}$. Die Zusammenhangskomponenten von $L(T) \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta_G} H_\alpha$ nennt man *Weylkammern*. Es handelt sich dabei um konvexe polyedrische Kegel.

Hält man eine Weylkammer C_0 fest, so kann man eine Wurzel α *positiv* nennen, wenn $\alpha|_{C_0} > 0$ ist, und *negativ*, wenn $\alpha|_{C_0} < 0$ ist. Es sei Δ^+ die Menge der positiven Wurzeln und Δ^- die Menge der negativen Wurzeln. Ist $\alpha \in \Delta^+$, so ist $-\alpha \in \Delta^-$. Eine Wurzel $\alpha \in \Delta^+$ heißt *einfach*, falls sie nicht in der Form $\alpha = \beta + \gamma$ mit $\beta, \gamma \in \Delta^+$ dargestellt werden kann. Sei Π die Menge aller einfachen Wurzeln.

Man kann zeigen: Π ist linear unabhängig, und jedes $\alpha \in \Delta$ kann in der Form $\alpha = \sum_{\gamma \in \Pi} a_\gamma \gamma$ dargestellt werden, mit Koeffizienten $a_\gamma \in \mathbb{Z}$, die entweder alle ≥ 0 oder alle ≤ 0 sind (je nachdem, ob α in Δ^+ oder in Δ^- liegt).

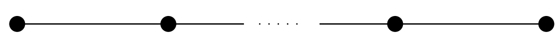
Unter dem *Dynkin-Diagramm* eines Wurzelsystems versteht man einen Graphen, der folgendermaßen konstruiert wird:

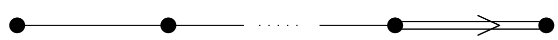
1) Für jede einfache Wurzel erhält der Graph eine „Ecke“.

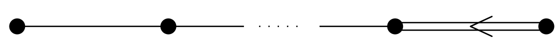
2) Je nachdem, ob der Wert von n oben $= 0$, 1, 2 oder 3 ist, werden zwei Ecken mit 0, 1, 2 oder 3 Kanten verbunden.

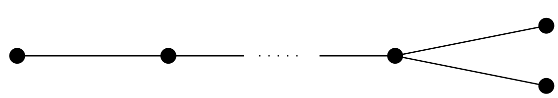
3) Dort, wo mehrere Verbindungen sind, zeigt ein Pfeil zur jeweils kürzeren Wurzel.

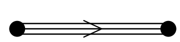
Man definiert nun abstrakte „irreduzible Wurzel-Systeme“ und zeigt, dass es dazu nur die folgenden Dynkin-Diagramme geben kann:

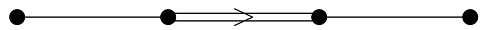
A_n:  $n \geq 1$,

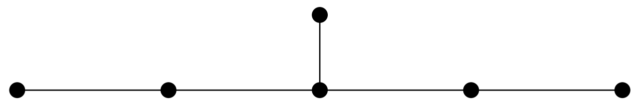
B_n:  $n \geq 2$,

C_n:  $n \geq 3$,

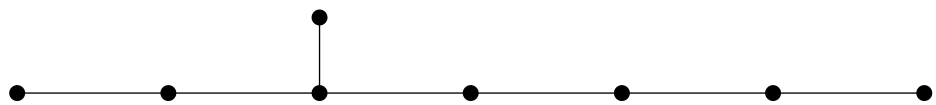
D_n:  $n \geq 4$,

G_2: 

F_4: 

E_6: 

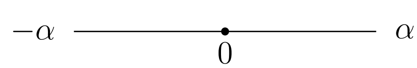
E_6: 

E_6: 

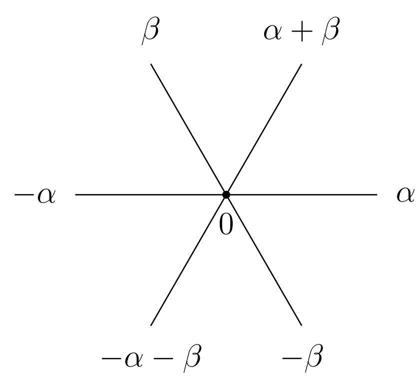
Dabei entsprechen die ersten 4 Serien A_n, B_n, C_n und D_n den Liegruppen $SU(n+1)$, $SO(2n+1)$, $Sp(n)$ und $SO(2n)$. Die restlichen Dynkin-Diagramme repräsentieren die sogenannten „exzeptionellen Gruppen".

Beispiele.

1. Die Gruppe $SU(2)$ mit dem Wurzelsystem $\Delta = \{\alpha, -\alpha\}$ wird durch das Dynkin-Diagramm A_1 repräsentiert, das nur aus einer einzigen Ecke besteht. Das zugehörige Wurzel-Diagramm hat die Gestalt



2. Die Gruppe $SU(3)$ wird durch das Dynkin-Diagramm A_2 repräsentiert. Es gibt die beiden einfachen Wurzeln α und β. Daraus leitet sich das Wurzelsystem $\Delta = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta)\}$ ab, weil offensichtlich der Fall $n = 1$ aus Satz 3.13 vorliegt. Das Wurzel-Diagramm sieht dann folgendermaßen aus:



Der Nullpunkt in der Mitte repräsentiert die 2-dimensionale maximale abelsche Unteralgebra $\mathfrak{t}$. Zusammen mit den 6 Wurzeln ergibt das 8 Gewichte für die adjungierte Darstellung. Dieses Schema hat besondere Bedeutung für das Quark-Modell in der Quantenphysik, man spricht dort auch vom „eightfold way".