§ 2 Darstellungstheorie (maximale Tori und Wurzeln)

Sei G eine Liegruppe (mit neutralem Element e), $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition.
Sei E ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Eine *Darstellung* von G (über k) auf E ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_k(E)$. Man nennt E dann auch einen G-Modul (über k) und schreibt $g \cdot v$ an Stelle von $\varrho(g)v$.

Ist ϱ injektiv, so spricht man von einer *treuen Darstellung*.

Für jede Darstellung gilt:

$$e \cdot v = v \quad \text{und} \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot v) = (g_1 g_2) \cdot v, \text{ für } g_1, g_2 \in G,\, v \in E.$$

Die Darstellung ist genau dann treu, wenn gilt:

$$\text{Ist } g \cdot v = v \text{ für alle } v \in E, \text{ so ist } g = e.$$

Man kann zeigen, dass jede kompakte Liegruppe eine treue Darstellung besitzt und deshalb zu einer abgeschlossenen Untergruppe einer Matrizengruppe isomorph ist.

Die Äquivalenz von Darstellungen wird wie üblich definiert.

Definition.
Sei E ein komplexer G-Modul. Ein hermitesches Produkt $<\ldots, \ldots>$ auf E heißt *G-invariant*, falls gilt:

$$<gu\,,\, gv> = <u\,,\, v>, \text{ für alle } g \in G.$$

Man nennt dann die zugehörige Darstellung auch eine *unitäre Darstellung*.

2.1 Satz. *Sei G eine kompakte Liegruppe, $\mathscr{C}(G)$ der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf G. Dann gibt es genau eine Abbildung $\mu_G : \mathscr{C}(G) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *μ_G ist $\mathbb{R}$-linear.*
2. *μ_G ist monoton: Ist $f \geq 0$, so ist auch $\mu_G(f) \geq 0$.*
3. *μ_G ist normiert: $\mu_G(1) = 1$.*
4. *μ_G ist links-invariant: $\mu_G(f \circ L_g) = \mu_G$ für alle $g \in G$.*

Man nennt μ_G das *links-invariante Haarsche Maß* auf G, und man kann zeigen, dass $\mu_G(f \circ \varphi) = \mu_G(f)$ für jeden Liegruppen-Automorphismus φ von G gilt.

Bemerkung. Zur Konstruktion: Eine nicht-verschwindende n-Form auf $T_e(G)$ kann per Links-Translation zu einer links-invarianten nirgends verschwindenden differenzierbaren n-Form ω auf G fortgesetzt werden. Das Maß $\mu(f) := \int_G f \cdot \omega$

kann noch normiert werden. So erhält man das Haarsche Maß. Man schreibt meist $\mu_G(f) = \int_G f(g)\,dg$. (Details siehe [Bou3], [Hil-Ne], [Brö-tDie]).

2.2 Satz. *Sei G eine kompakte Liegruppe, $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$ eine endlich-dimensionale Darstellung. Dann gibt es auf E ein G-invariantes Skalarprodukt.*

BEWEIS: Ist ein beliebiges Skalarprodukt $<\ldots, \ldots>$ auf E gegeben, so setze man

$$<u\,,\,v>_0 := \int_G <gu\,,\,gv>\,dg.$$

Das ist das gesuchte invariante Skalarprodukt. ∎

Reduzible und irreduzible G-Moduln werden wie üblich definiert, und das Schur'sche Lemma kann wörtlich übernommen werden.

Unitäre Darstellungen sind voll reduzibel. Außerdem gilt:

2.3 Satz. *Jede irreduzible komplexe Darstellung einer abelschen Liegruppe ist* 1*-dimensional.*

BEWEIS: Ist G abelsch und $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$ eine Darstellung, so ist für jedes $g \in G$ die Abbildung $\varrho(g) : E \to E$ ein G-Morphismus. Weil E irreduzibel ist, folgt aus dem Schur'schen Lemma, dass es zu g ein $c(g) \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $\varrho(g) = c(g) \cdot \mathrm{id}$ ist. Aber dann ist jeder 1-dimensionale Unterraum irreduzibel. ∎

Definition.

Sei E ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varrho : G \to \mathrm{GL}(E)$ eine Darstellung. Dann versteht man unter dem *Charakter* von ϱ (bzw. E) die durch $\chi_E(g) := \mathrm{Spur}(\varrho(g))$ definierte Abbildung $\chi_E : G \to \mathbb{C}$.

Hier sind nun einige Bemerkungen zu machen:

- Die *Spur* $\mathrm{Spur} : \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E) \to \mathbb{C}$ ist eine lineare Abbildung, und für $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ und $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$ ist $\mathrm{Spur}(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{Spur}(f)$. Also hängt der Charakter einer Darstellung nur von der Äquivalenzklasse der Darstellung ab, und es ist $\chi_E(hgh^{-1}) = \chi_E(g)$.

- Als Zusammensetzung des stetigen Homomorphismus ϱ und der Linearform Spur ist χ_E stetig.

- Weil $\mathrm{Spur}(f_1 \oplus f_2) = \mathrm{Spur}(f_1) + \mathrm{Spur}(f_2)$ ist, ist $\chi_{E \oplus F}(g) = \chi_E(g) + \chi_F(g)$.

- Zu jeder linearen Abbildung $f : E \to E$ gibt es die duale Abbildung $f^* : E^* \to E^*$ mit $f^*(\lambda) := \lambda \circ f$. Wird f bezüglich einer Basis durch eine Matrix A beschrieben, so wird f^* bezüglich der dualen Basis durch $A^\top$ beschrieben. Ist $\varrho : G \to \mathrm{GL}(E)$ eine Darstellung, so kann man dies als eine Operation von G auf E auffassen. Dadurch wird eine Darstellung $\varrho^* : G \to \mathrm{Aut}(E^*)$ definiert, mit

$$(\varrho^*(g)\lambda)(v) := \lambda(\varrho(g^{-1})v), \text{ für } v \in E, \ \lambda \in E^*.$$

Man nennt ϱ^* die zu ϱ *kontragrediente* (oder *duale*) Darstellung.

Offensichtlich ist dann $\chi_{E^*}(g) = \chi_E(g^{-1})$.

- Es ist $\varrho(e) = \mathrm{id}_E$, also $\chi_E(e) = \mathrm{Spur}(\mathrm{id}_E) = \dim_{\mathbb{C}}(E)$.

- Ist E ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, so versteht man unter dem Raum $\overline{E}$ die Menge E (mit der vorhandenen Struktur einer additiven abelschen Gruppe) und folgender Operation $\mu : \mathbb{C} \times E \to E$:

$$\mu(c, v) := \overline{c} \cdot v.$$

So wird $\overline{E}$ zu einem komplexen Vektorraum.

Ist $f : E \to E$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, so wird eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\overline{f} : \overline{E} \to \overline{E}$ induziert, mit $\overline{f}(v) := f(v)$. Es ist nämlich

$$\overline{f}(\mu(c, v)) = f(\overline{c} \cdot v) = \overline{c} \cdot f(v) = \mu(c, \overline{f}(v)).$$

Wird f durch die Matrix A beschrieben, so $\overline{f}$ durch $\overline{A}$. Also ist $\mathrm{Spur}(\overline{f}) = \overline{\mathrm{Spur}(f)}$.

Sei nun $\varrho : G \to \mathrm{GL}(E)$ eine Darstellung. Dann ist $\chi_{\overline{E}} = \overline{\chi_E}$.

2.4 Satz. *Sei G eine kompakte Liegruppe und $\varrho : G \to \mathrm{GL}(E)$ eine (komplexe) Darstellung. Dann sind die Darstellungen E^* und $\overline{E}$ äquivalent. Insbesondere ist $\chi_{E^*} = \chi_{\overline{E}}$.*

BEWEIS: Sei $h : E \times E \to \mathbb{C}$ ein G-invariantes hermitesches Skalarprodukt (mit $h(cv, w) = c \cdot h(v, w)$ und $h(v, cw) = \overline{c} \cdot h(v, w)$). Dann ist $\varphi : \overline{E} \to E^*$ mit $\varphi(v)(w) := h(w, v)$ ein $\mathbb{C}$-linearer G-Isomorphismus, denn es ist $\varphi(\mu(c, v))(w) = h(w, \overline{c}v) = c \cdot h(w, v) = c \cdot (\varphi(v)(w)) = (c \cdot \varphi(v))(w)$ und $\varphi(\varrho(g)v)(w) = h(w, gv) = h(g^{-1}w, v) = \varphi(v)(g^{-1}w) = \varrho^*(g)\varphi(v)(w)$. ∎

Ist E ein G-Modul, so setzen wir $E^G := \{v \in E \ : \ gv = v \text{ für alle } g \in G\}$. Sind E und F G-Moduln, so sei $\mathrm{Hom}_G(E, F)$ der Raum aller G-Morphismen von E nach F.

2.5 Satz (Orthogonalitäts-Relationen).

1. $\int_G \chi_E(g)\, dg = \dim_{\mathbb{C}}(E^G)$.
2. $\int_G \chi_E(g)\overline{\chi_F}(g)\, dg = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(E, F)$.

3. Sind E und F irreduzibel, so ist $\displaystyle\int_G \chi_E(g)\overline{\chi_F}(g)\,dg = \begin{cases} 1 & \text{falls } E \cong F, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Auf den BEWEIS wird hier verzichtet (vgl [Ad1], [Brö-tDie]).

2.6 Folgerung. *Sind E, F zwei G-Moduln, so ist genau dann $\chi_E = \chi_F$, wenn $E \cong F$ ist.*

BEWEIS: Sei $(E_\iota)_{\iota\in I}$ die Familie aller Äquivalenzklassen von irreduziblen Darstellungen von G. Dann gibt es zu jeder Darstellung E von G eine endliche Teilmenge $I(E) \subset I$ und zu jedem $\iota \in I(E)$ eine natürliche Zahl n_ι, so dass gilt: $E = \bigoplus_{\iota\in I(E)} E_\iota^{n_\iota}$, mit $E_\iota^{n_\iota} = E_\iota \oplus \ldots \oplus E_\iota$ (n_ι-mal). Daraus folgt: $\chi_E = \sum_{\iota\in I(E)} n_\iota \cdot \chi_{E_\iota}$, mit $n_\iota = \int_G \chi_E \overline{\chi}_{E_\iota}\,dg$. Ist $\chi_E = \chi_F$, so stimmen die Koeffizienten n_ι für beide Darstellungen und alle ι überein. Dann ist aber $E \cong F$.

Die umgekehrte Richtung ist trivial. ∎

Definition.

a) Ein *Torus* ist eine kompakte zusammenhängende abelsche Liegruppe.

b) Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe. Ein Torus $T \subset G$ heißt *maximaler Torus*, falls gilt: Ist T' ein weiterer Torus mit $T \subset T' \subset G$, so ist $T = T'$.

2.7 Satz. *Ist T eine zusammenhängende abelsche Liegruppe, so ist* $\exp : L(T) \to T$ *ein surjektiver Homomorphismus.*

BEWEIS: Weil T abelsch ist, ist die Multiplikationsabbildung $\mu : T \times T \to T$ ein Liegruppen-Homomorphismus. Nun seien die Abbildungen $j_1 : T \to T \times T$ und $j_2 : T \to T \times T$ definiert durch $j_1(g) := (g, e)$ und $j_2(g) := (e, g)$. Dann ist $\mu \circ j_1 = \mu \circ j_2 = \mathrm{id}_T$ und

$$\mu_*(v, w) = \mu_*((v, 0) + (0, w)) = \mu_* \circ (j_1)_*(v) + \mu_* \circ (j_2)_*(w) = v + w.$$

$\exp_{T\times T} : L(T \times T) = L(T) \oplus L(T) \to T \times T$ ist gegeben durch $\exp_{T\times T}(v, w) = (\exp_T(v), \exp_T(w))$, und weil μ ein Homomorphismus ist, haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{cccc} & L(T\times T) & \xrightarrow{\mu'} & L(T) & \\ \exp_{T\times T} & \downarrow & & \downarrow & \exp_T \\ & T\times T & \xrightarrow{\mu} & T & \end{array}$$

Also ist $\exp_T(v + w) = \exp_T \circ \mu'(v, w) = \mu \circ \exp_{T\times T}(v, w) = \exp_T(v)\exp_T(w)$.

Da T von einer Umgebung $U = U(e)$ erzeugt wird, gibt es zu jedem $g \in T$ Elemente $g_1, \ldots, g_k \in U$, so dass $g = g_1 \cdots g_k$ ist. Dabei kann man U so klein wählen, dass es eine Umgebung $V = V(0) \subset L(T)$ gibt, die diffeomorph auf U abgebildet wird. Dann gibt es Elemente $v_1, \ldots, v_k \in L(T)$, so dass $g_i = \exp(v_i)$ ist, für $i = 1, \ldots, k$. Daraus folgt:

$$g = \exp(v_1) \cdots \exp(v_k) = \exp(v_1 + \cdots + v_k).$$

Also ist $\exp_T$ surjektiv. ∎

Definition.

Sei E ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von E. Dann nennt man

$$\Gamma := \{x = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu a_\nu \, : \, \gamma_\nu \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \nu \}$$

ein *(ganzzahliges) Gitter* in E.

2.8 Folgerung. *Ist T ein Torus, so ist $\Gamma_T := \mathrm{Ker}(\exp)$ ein Gitter in $L(T)$ und*

$$T \cong L(T)/\Gamma_T \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong S^1 \times \ldots \times S^1.$$

BEWEIS: Weil T zusammenhängend und abelsch ist, ist $\exp : L(T) \to T$ ein surjektiver Homomorphismus. Weil exp lokal diffeomorph ist, muss $\Gamma_T := \mathrm{Ker}(\exp)$ eine diskrete Untergruppe von $L(T)$ sein. Man kann nun zeigen, dass jede solche diskrete Untergruppe eines endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes eine freie abelsche Gruppe mit (über $\mathbb{R}$ linear unabhängigen) Erzeugenden $a_1, \ldots, a_k$ ist.

Ergänzt man die a_i zu einer Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von $L(T)$, so ist

$$T \cong L(T)/\Gamma_T = (\mathbb{R}a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}a_n)/(\mathbb{Z}a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}a_k) \cong (\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k) \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Da T kompakt ist, muss $k = n$ und Γ_T ein Gitter sein. Offensichtlich ist dann $T \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$. Es ist aber $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, vermöge $[x] \mapsto e^{2\pi \mathrm{i}\, x}$. ∎

Ist $T = T^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ der „Standard-Torus", so haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{i}\,\mathbb{R}^n & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n & \\ p & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \exp \\ & \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\cong} & U(1)^n & \hookrightarrow & (\mathbb{C}^*)^n & \end{array}$$

Dabei ist $\varphi(\mathbf{x}) := 2\pi \mathrm{i}\,\mathbf{x}$, $p(\mathbf{x})$ die Äquivalenzklasse von $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, und

$$\exp(z_1, \ldots, z_n) = (\exp(z_1), \ldots, \exp(z_n)).$$

Es ist $U(1) = \{z \in \mathbb{C}^\times \, : \, z\overline{z} = 1\} = S^1$ und $L(U(1)) = \{z \in \mathbb{C} \, : \, z = -\overline{z}\} = \mathrm{i}\,\mathbb{R}$, also $L(U(1)^n) = \mathrm{i}\,\mathbb{R}^n$. Der Kern von $\exp \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to U(1)^n$

$$(\text{mit } (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\exp(2\pi \mathrm{i}\, x_1), \ldots, \exp(2\pi \mathrm{i}\, x_n)) \;)$$

ist die Untergruppe $\mathbb{Z}^n$, also gibt es einen injektiven Homomorphismus $\psi : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to U(1)^n$ mit $\psi \circ p = \exp \circ \varphi$. Weil $\exp \circ \varphi$ surjektiv ist, ist ψ sogar ein Isomorphismus. Die Exponentialabbildung $L(T^n) = \mathbb{R}^n \to T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ist einfach die Projektion p.

Ist $T = SU(1)^n$ (und $L(T) = \mathrm{i}\,\mathbb{R}^n$), so ist $\Gamma_T = 2\pi\mathrm{i}\,\mathbb{Z}^n$.

Sei G eine kompakte Liegruppe. Ist $H \subset G$ eine abelsche Untergruppe, so ist auch $\overline{H}$ eine abelsche Gruppe. Ein Beispiel einer abelschen Untergruppe ist etwa eine 1-Parameter-Gruppe in G. Ein Element $g \in G$ heißt *Generator* von G, falls $< g >= \{g^k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ dicht in G ist, also $\overline{< g >} = G$. Die Gruppe heißt dann *monogen*. Man kann zeigen: Ist G abelsch und kompakt, so ist G monogen. Insbesondere ist jeder Torus monogen.

2.9 Satz. *Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe,* $\dim(G) > 0$. *Dann gibt es einen nicht-trivialen Torus in G, und jeder nicht-triviale Torus ist in einem maximalen Torus enthalten.*

Beweis: Sei $v \in L(G) \setminus \{0\}$ und $\varphi(t) := \exp(tv)$. Weil $\exp(1) = v \neq 0$ ist, ist $T := \overline{\{\varphi(t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}}$ ein nicht-trivialer Torus.

Sei nun $T \subset G$ irgend ein nicht-trivialer Torus. Ist T nicht maximal, so gibt es einen Torus $T_1 \subset G$ mit $T \subset T_1$ und $\dim(T_1) > \dim(T)$. Dieses Verfahren kann man fortsetzen, es muss aber nach endlich vielen Schritten abbrechen. ∎

Definition.
Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und $T \subset G$ ein Torus. Dann heißt

$$\begin{aligned} N_G(T) &:= \{x \in G \,:\, xTx^{-1} = T\} \text{ der } \textit{Normalisator} \text{ von } T \text{ in } G \\ \text{und } Z_G(T) &:= \{x \in G \,:\, xax^{-1} = a \ \forall\ a \in T\} \text{ der } \textit{Zentralisator} \text{ von } T \text{ in } G. \end{aligned}$$

2.10 Satz. *Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und $T \subset G$ ein Torus. T ist genau dann maximal, wenn $T = Z_G(T)$ ist.*

Beweis: 1) Sei T maximal. Weil T abelsch ist, ist auf jeden Fall $T \subset Z_G(T)$. Ist umgekehrt $g \in Z_G(T)$, so ist $\overline{< g, T >}$ abelsch und kompakt, also monogen. Sei x_0 ein Generator, und T_1 ein Torus mit $x_0 \in T_1 \subset G$. Dann ist T in T_1 enthalten, wegen der Maximalität also $T = T_1$ und damit auch $g \in T$.

2) Sei $T = Z_G(T)$ und $T \subset T'$ (mit einem Torus T'). Weil T' abelsch ist, liegt T' in $Z_G(T)$ und damit in T. Also ist T maximal. ∎

Um zu zeigen, dass ein konkreter Torus $T \subset G$ maximal ist, genügt es also zu zeigen, dass $Z_G(T) \subset T$ ist.

Beispiele.

1. Sei $G = U(n)$, $T := \{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \,:\, \alpha_i \in S^1\}$, wobei $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen α_i bezeichnen möge. Dann ist T natürlich ein Torus.

   Sei $A = (a_{ij}) \in Z_G(T)$. Dann ist $A \cdot D \cdot A^{-1} = D$, für alle $D \in T$, also $A \cdot D = D \cdot A$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} (A \cdot D)_{ij} &= \sum_\nu a_{i\nu} \cdot (\alpha_\nu \delta_{\nu j}) = \alpha_j a_{ij} \\ \text{und } (D \cdot A)_{ij} &= \sum_\nu (\alpha_i \delta_{i\nu}) \cdot a_{\nu j} = \alpha_i a_{ij}. \end{aligned}$$

   Ist speziell $D = \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$, so folgt: $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$, also $A \in T$.

   Damit ist $Z_G(T) = T$, also T ein maximaler Torus in $U(n)$.

2. Analog folgt:

$$T := \{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \,:\, \alpha_i \in S^1 \text{ und } \alpha_1 \cdots \alpha_n = 1\}$$

   ist maximaler Torus in $SU(n)$.

   Im Falle der Gruppe $SU(2)$ erhält man den maximalen Torus

$$T = \{\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\,t_1} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\,t_2} \end{pmatrix} \,:\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ und } t_1 + t_2 \in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

3. Sei $G := SO(2n)$. Wir benutzen die elementaren Dreh-Matrizen $R(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Dann ist

$$T := \{\begin{pmatrix} R(t_1) & & \\ & \ddots & \\ & & R(t_n) \end{pmatrix} \,:\, t_i \in \mathbb{R}\}$$

   ein maximaler Torus in $SO(2n)$.

   Der Beweis wird ähnlich wie im Falle der unitären Gruppe geführt. Eine Matrix $A \in Z_G(T)$ wird dabei in 2×2-Kästchen A_{ij} aufgeteilt, und man zeigt, dass A_{ij} für $i \neq j$ die Nullmatrix sein muss (etwa, indem man $t_i = 0$ und $t_j = \pi$ wählt). Man sieht dann, dass die Kästchen A_{ii} in $O(2)$ liegen müssen. Aus der Gleichung $R(t_i) \cdot A_{ii} = A_{ii} \cdot R(t_i)$ für alle $t_i \in \mathbb{R}$ folgt, dass A_{ii} sogar in $SO(2)$ liegen muss (z.B. mit $t_i = 3\pi/2$).

Im Falle der Gruppe $G = SO(2n+1)$ erhält man den maximalen Torus

$$T = \{ \left(\begin{array}{ccc|c} R(t_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & R(t_n) & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \,:\, t_i \in \mathbb{R} \} \,.$$

Der Beweis sei dem Leser überlassen.

Speziell ist $T_{SO(2)} = SO(2)$ und $T_{SO(3)} = \{ \begin{pmatrix} R(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R}\} \cong SO(2)$.

4. Die unitäre Gruppe $U(n)$ wird vermöge $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}$ in die symplektische Gruppe $Sp(n)$ eingebettet. Das Bild des maximalen Torus von $U(n)$ ergibt einen maximalen Torus in $Sp(n)$, nämlich

$$T = \{ \begin{pmatrix} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & 0 \\ 0 & \Delta(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) \end{pmatrix} \,:\, \alpha_i \in S^1 \} \,.$$

2.11 Überdeckungssatz. *Sei G eine zusammenhängende kompakte Liegruppe und $T \subset G$ ein maximaler Torus. Dann ist $G = \bigcup_{x \in G} xTx^{-1}$. Insbesondere liegt jedes Element von G in einem maximalen Torus.*

Der aufwendige Beweis kann hier nicht geführt werden (vgl. [Brö-tDie]).

2.12 Folgerung 1. *Sind $T, T' \subset G$ zwei maximale Tori, so gibt es ein $x \in G$ mit $T' = xTx^{-1}$. Insbesondere haben alle maximalen Tori in G die gleiche Dimension.*

Beweis: Sei x_0 ein Generator von T'. Dann gibt es ein $x \in G$, so dass $x_0 \in xTx^{-1}$ ist. Aber dann ist auch $T' \subset xTx^{-1}$, und weil T' maximal ist, gilt die Gleichheit. ∎

Definition.

Die Dimension eines maximalen Torus in (einer zusammenhängenden kompakten) Liegruppe G nennt man den *Rang* von G.

2.13 Folgerung 2. *Ist G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe, so ist* $\exp : L(G) \to G$ *surjektiv.*

Beweis: Ist $g \in G$, so liegt g in einem maximalen Torus $T \subset G$. Es ist aber $L(T) \subset L(G)$ und $\exp : L(T) \to T$ surjektiv. ∎

2.14 Folgerung 3. *Ist G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe, so ist* $Z(G) = \bigcap_{\substack{T \subset G \\ \text{max. Torus}}} T$.

BEWEIS: 1) Sei $x \in Z(G)$. Ist $T \subset G$ ein maximaler Torus, so gibt es ein y mit $x \in yTy^{-1}$. Aber dann ist $y^{-1}xy \in T$, und weil x im Zentrum liegt, ist $y^{-1}xy = x$.

2) Liegt umgekehrt x in jedem maximalen Torus, so kommutiert x mit der Vereinigung aller maximalen Tori und damit mit ganz G. ■

Wir betrachten jetzt die Darstellungen eines Torus T. Da jede irreduzible Darstellung einer abelschen Gruppe 1-dimensional ist, betrachten wir Homomorphismen $\varrho : T \to \mathbb{C}^\times$. Weil T kompakt ist, können wir annehmen, dass $\varrho(T) \subset U(1)$ ist. Übrigens stimmt in diesem Fall der Charakter von ϱ mit ϱ überein.

Sei $p : L(T) = L(T)/\Gamma_T$ die kanonische Projektion. Dann induziert die Exponentialabbildung $\exp : L(T) \to T$ einen Isomorphismus $\psi : L(T)/\Gamma_T \to T$ mit $\psi \circ p = \exp$.

Das führt zu folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & L(T) \arrow[r, "\alpha=\varrho'"] \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "\exp"] & \mathsf{i}\,\mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\
L(T)/\Gamma_T \arrow[r, "\psi"] & T \arrow[r, "\varrho"] & U(1)
\end{tikzcd}$$

Es muss eine Linearform $\lambda \in L(T)^*$ geben, so dass gilt: $\alpha(u) = 2\pi\mathsf{i}\,\lambda(u)$. Für $u \in \Gamma_T$ ist dann $p(u) = p(0)$, also

$$\begin{aligned}
\exp(2\pi\mathsf{i}\,\lambda(u)) &= \exp(\alpha(u)) = \varrho(\exp(u)) \\
&= \varrho(\psi(p(u))) = \varrho(\exp(0)) \\
&= \varrho(e_T) = 1 \text{ und damit } \lambda(u) \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt:

2.15 Satz. *Die Charaktere (von irreduziblen Darstellungen) $\varrho : T \to U(1)$ haben die Gestalt $\varrho : u \mapsto \exp(2\pi\mathsf{i}\,\lambda(u))$, mit einer Linearform $\lambda \in L(T)^*$ und $\lambda(\Gamma_T) \subset \mathbb{Z}$.*

Ist $\sigma : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$ eine Darstellung, so erhält man daraus die abgeleitete Darstellung $\sigma' : L(G) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$. Jeder G-Modul ist also auch ein $L(G)$-Modul. Ist $G = T$ ein Torus, so zerfällt E in irreduzible 1-dimensionale Unterräume. Sei $F \subset E$ ein solcher irreduzibler Unterraum, also $F \cong \mathbb{C}$. Dann gibt es zu jedem $g \in T$ eine Zahl $\varrho(g) \in U(1)$ mit $\sigma(g)(v) = \varrho(g) \cdot v$ für $v \in F$. Offensichtlich ist ϱ der Charakter der irreduziblen Darstellung $\sigma : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(F)$.

Definition.

Sei $T = L(T)/\Gamma_T$ ein Torus und E ein komplexer T-Modul, vermöge $\sigma : T \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(E)$. Ein stetiger Homomorphismus $\varrho : T \to U(1)$ heißt ein *Gewicht* von E (bzw. von der Darstellung σ), falls gilt:

$$E_\varrho := \{v \in E \,:\, \sigma(g)(v) = \varrho(g) \cdot v \text{ für alle } g \in T\} \neq \{0\}.$$

Analog bezeichnet man eine Linearform $\alpha = 2\pi\mathsf{i}\,\lambda : L(T) \to \mathbb{C}$ mit $\lambda \in L(T)^*$ und $\lambda(\Gamma_T) \subset \mathbb{Z}$ als *infinitesimales Gewicht* von E, falls gilt:

$$E_\alpha^{\text{inf}} := \{v \in E \,:\, \sigma'(h)(v) = \alpha(h) \cdot v \text{ für alle } h \in L(T)\} \neq \{0\}.$$

Die Linearform λ bezeichnet man als *reelles Gewicht* von E.

2.16 Satz. *Sei E ein komplexer T-Modul. Die Abbildung $\varrho \mapsto \varrho'$ liefert eine Bijektion zwischen der Menge der Gewichte und der Menge der infinitesimalen Gewichte von E. Ist ϱ ein Gewicht von E, so ist $E_\varrho = E_{\varrho'}^{\text{inf}}$.*

Beweis: Die Darstellung sei durch einen Homomorphismus $\sigma : G \to \text{Aut}(E)$ gegeben.

1) Sei ϱ ein Gewicht und $v \in E_\varrho$, $v \neq 0$. Dann ist $\sigma(g)(v) = \varrho(g) \cdot v$. Ist $h \in L(G)$ und $\varphi(t) = \exp(th)$ die 1-p-Gruppe zu h, so ist $\sigma(\varphi(t))(v) = \varrho(\varphi(t)) \cdot v$. Differentiation nach t bei $t = 0$ ergibt $\sigma'(h)(v) = \varrho'(h) \cdot v$. Also ist ϱ' ein infinitesimales Gewicht und $v \in E_{\varrho'}^{\text{inf}}$.

2) Sei nun umgekehrt $\alpha = 2\pi \mathrm{i}\, \lambda$ ein infinitesimales Gewicht, $v \neq 0$ und $\sigma'(h)(v) = \alpha(h) \cdot v$ für alle $h \in L(T)$.

Es ist $\sigma \circ \exp = \text{Exp} \circ \sigma'$, mit $\text{Exp}(f) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^\nu$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\sigma(\exp(h))(v) &= \text{Exp}(\sigma'(h))(v) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sigma'(h)^\nu(v) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \alpha(h)^\nu \cdot v \\
&= e^{\alpha(h)} \cdot v.
\end{aligned}$$

Da $\exp : L(T) \to T$ surjektiv und $e^{\alpha(h)} = e^{2\pi \mathrm{i}\, \lambda(h)} \in U(1)$ ist, kann man $\varrho : T \to U(1)$ durch $\varrho(\exp(h)) := e^{\alpha(h)}$ definieren. Das ist wohl-definiert: Ist nämlich $\exp(h) = e$, so ist $h \in \text{Ker}(\exp) = \Gamma_T$, also $\lambda(h) \in \mathbb{Z}$ und $e^{\alpha(h)} = e^{2\pi \mathrm{i}\, \lambda(h)} = 1$.

Offensichtlich ist ϱ eine Darstellung und

$$\varrho'(v) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varrho \circ \exp(tv) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp \circ \alpha(tv) = \alpha(v).$$

Außerdem gilt für $g = \exp(h) \in T$:

$$\sigma(g)(v) = \sigma \circ \exp(h)(v) = \text{Exp} \circ \sigma'(h)(v) = e^{\alpha(h)} \cdot v = \varrho(g) \cdot v.$$

Damit ist ϱ ein Gewicht und $v \in E_\varrho$. ∎

Sei nun G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und $T \subset G$ ein maximaler Torus. Wir betrachten die adjungierte Darstellung:

$$\text{Ad} : G \to \text{Aut}(L(G)), \text{ mit } \text{Ad}(g) = (i_g)' \text{ und } i_g(x) = gxg^{-1}.$$

Dann ist $\mathrm{ad} := \mathrm{Ad}' : L(G) \to \mathrm{End}(L(G))$ gegeben durch $\mathrm{ad}(h)(v) = [h, v]$.

$L(G)$ ist ein reeller Darstellungsraum. Um von Gewichten sprechen zu können, brauchen wir aber einen komplexen Darstellungsraum. Ist E ein reeller Vektorraum, so nennt man

$$E_{\mathbb{C}} := E \otimes \mathbb{C} = E \oplus \mathsf{i}\, E$$

die *Komplexifizierung* von E. Für $z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot (v \otimes c) = v \otimes (zc)$. Ist E ein G-Modul, so ist auch $E_{\mathbb{C}}$ ein G-Modul, vermöge $g \cdot (v \otimes c) := (g \cdot v) \otimes c$.

Sei $\mathfrak{g} = L(G)$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus \mathsf{i}\, \mathfrak{g}$ die komplexifizierte Liealgebra. Die Algebra $\mathfrak{t} = L(T) \subset \mathfrak{g}$ (bzw. $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$) nennt man eine *reelle* (bzw. *komplexe*) *Cartan-Unteralgebra*. Die adjungierten Darstellungen lassen sich ins Komplexe übertragen:

$$\mathrm{Ad}\,|_T : T \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \text{ und } \mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}).$$

Außerdem kann man $\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{t}}$ auf $\mathfrak{h}$ ausdehnen, durch

$$\mathrm{ad}(x + \mathsf{i}\, y)(v) := \mathrm{ad}(x)(v) + \mathsf{i}\ \mathrm{ad}(y)(v).$$

Ist $g \in T$, so ist $i_g|_T = \mathrm{id}_T$ und $\mathrm{Ad}(g)|_{L(T)} = \mathrm{id}_{L(T)}$, also $\mathrm{ad}(g)|_{L(T)} = 0$. Damit ist 0 ein infinitesimales Gewicht von $\mathrm{Ad}\,|_T$.

Definition.

Ein nicht-triviales Gewicht $\gamma : T \to U(1)$ der komplexen Darstellung $\mathrm{Ad}\,|_T : T \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ nennt man eine *Wurzel* von G. Ein nicht-triviales infinitesimales Gewicht $\alpha = 2\pi\mathsf{i}\,\lambda : L(T) \to \mathsf{i}\,\mathbb{R}$ von $\mathrm{Ad}\,|_T$ nennt man eine *infinitesimale Wurzel* von G. Die Linearform λ nennt man eine *reelle Wurzel*.

Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ heißt *komplexe Wurzel* von G, falls gilt:

$$L_\alpha^c := \{v \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \,:\, \mathrm{ad}(u)(v) = \alpha(u) \cdot v \text{ für alle } u \in \mathfrak{h}\} \neq \{0\}.$$

In der Literatur über Liealgebren versteht man unter *Wurzeln* i. a. komplexe (infinitesimale) Wurzeln. In [Ad1] werden Wurzeln für den reellen Darstellungsraum $\mathfrak{g}$ definiert; dann treten 2-dimensionale irreduzible Darstellungen auf.

Hier ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha : \mathfrak{t} = L(T) \to \mathsf{i}\,\mathbb{R}$ genau dann eine infinitesimale Wurzel von G, wenn gilt:

$$\alpha \neq 0 \text{ und } L_\alpha := \{v \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \,:\, [h, v] = \alpha(h) \cdot v \text{ für alle } h \in \mathfrak{t}\} \neq 0.$$

Es sei Φ_{Ad} die Menge aller (infinitesimalen) Gewichte von $\mathrm{Ad}\,|_T$ und $\Delta_G = \Phi_{\mathrm{Ad}} \setminus \{0\}$ die Menge aller (infinitesimalen) Wurzeln von G.

2.17 Satz. *Es ist* $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = L_0$ *und* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_G} L_\alpha$.

BEWEIS: Sei $L_0^r := \{v \in \mathfrak{g} \,:\, [h, v] = 0 \text{ für alle } h \in \mathfrak{t}\}$. Offensichtlich ist $\mathfrak{t} \subset L_0^r$ (weil T abelsch ist). Annahme, es gibt ein $v_0 \in L_0^r \setminus \mathfrak{t}$. Dann ist die 1-p-Gruppe $\exp(tv_0)$ abelsch und nicht in T enthalten.

Ist $g = \exp(h) \in T$, so ist $\mathrm{ad}(h)(v_0) = 0$ und

$$\mathrm{Ad}(g)(v_0) = \mathrm{Ad} \circ \exp(h)(v_0) = \mathrm{Exp} \circ \mathrm{ad}(h)(v_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \mathrm{ad}(h)^{\nu}(v_0) = v_0,$$

also $I_g \circ \exp(tv_0) = \exp(\mathrm{Ad}(g)(tv_0)) = \exp(tv_0)$, d.h., die Elemente der 1-p-Gruppe sind mit den Elementen von T vertauschbar. Damit ist $T_1 := \overline{< \exp(tv_0), T >}$ eine kompakte zusammenhängende abelsche Gruppe mit $T \subset T_1$ und $T \neq T_1$. Das kann nicht sein; es ist $L_0^r = \mathfrak{t}$.

Der Rest ist klar, weil die Darstellung von $\mathrm{Ad}\,|_T$ auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ in 1-dimensionale irreduzible Darstellungen zerfällt. Die Ableitungen der zugehörigen Charaktere sind die infinitesimalen Wurzeln. ∎

Beispiele.

1. Sei $G = SU(n)$, $T = \{\Delta(e^{\mathrm{i}\,t_1}, \ldots, e^{\mathrm{i}\,t_n}) \,:\, t_1 + \cdots + t_n = 0\}$. Dann ist $\mathfrak{g} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \,:\, \overline{A}^{\top} = -A \text{ und } \mathrm{Spur}(A) = 0\}$ und

$$\mathfrak{t} = \{\Delta(\mathrm{i}\,t_1, \ldots, \mathrm{i}\,t_n) \,:\, t_1 + \cdots + t_n = 0\},$$

also $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \,:\, \mathrm{Spur}(Z) = 0\}$, denn jede Matrix $Z \in M_n(\mathbb{C})$ kann folgendermaßen zerlegt werden:

$$Z = A + \mathrm{i}\,B, \text{ mit } A := \frac{1}{2}(Z - \overline{Z}^{\top}),\; B := \frac{1}{2\mathrm{i}}(Z + \overline{Z}^{\top}) \in L(U(n)).$$

Außerdem ist $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \{\Delta(z_1, \ldots, z_n) \,:\, z_1 + \cdots + z_n = 0\}$.

Mit $E_{\nu\mu}$ seien die Elemente der kanonischen Basis von $M_n(\mathbb{C})$ bezeichnet. Für $\nu \neq \mu$ sei $V_{\nu\mu} := \{z \cdot E_{\nu\mu} \,:\, z \in \mathbb{C}\}$. Dann ist $V_{\nu\mu}$ ein 1-dimensionaler komplexer Vektorraum und

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\nu \neq \mu} V_{\nu\mu}.$$

Nun rechnet man nach: Ist $\Delta(\mathrm{i}\,\mathbf{t}) \in \mathfrak{t}$, so ist

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(\Delta(\mathrm{i}\,\mathbf{t}))(E_{\nu\mu}) &= [\Delta(\mathrm{i}\,\mathbf{t})), E_{\nu\mu}] \\ &= \Delta(\mathrm{i}\,\mathbf{t}) \cdot E_{\nu\mu} - E_{\nu\mu} \cdot \Delta(\mathrm{i}\,\mathbf{t}) \\ &= \mathrm{i}\,(t_\nu - t_\mu) \cdot E_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon_\nu : \mathfrak{t} \to \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ die Projektion auf die ν-te Komponente, so erhalten wir $\Delta_G = \{\varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu \,:\, \nu \neq \mu\}$ als System der (infinitesimalen) Wurzeln von $SU(n)$.

2. Sei $G = SO(2n)$. Wir benutzen die Einbettung $J : U(n) \hookrightarrow SO(2n)$, gegeben durch
$$(z_{\nu\mu}) \mapsto (A_{\nu\mu}).$$
Ist $z_{\nu\mu} = x_{\nu\mu} + \mathsf{i}\, y_{\nu\mu}$, so setze man $A_{\nu\mu} := \begin{pmatrix} x_{\nu\mu} & -y_{\nu\mu} \\ y_{\nu\mu} & x_{\nu\mu} \end{pmatrix}$. Dann gilt:

Ist $j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ der Isomorphismus mit
$$j(z_1, \ldots, z_n) := (\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Im}(z_1), \ldots, \mathrm{Re}(z_n), \mathrm{Im}(z_n)),$$
so ist $j(A \cdot \mathbf{z}^\top) = J(A) \cdot j(\mathbf{z})^\top$, für $A \in U(n)$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Daraus folgt:
$$J(A \cdot B) = J(A) \cdot J(B) \text{ und } J(\overline{A}^\top) = J(A)^\top.$$
Außerdem ist $J(A) = E_{2n} \iff A = E_n$, also J injektiv. Es folgt, dass $J(U(n))$ eine Untergruppe von $O(n)$ ist. Weil komplexe Transformationen des $\mathbb{R}^{2n}$ orientierungstreu sind, liegt diese Gruppe sogar in $SO(2n)$.

Es ist $J(\Delta(e^{\mathsf{i}\,t_1}, \ldots, e^{\mathsf{i}\,t_n})) = \begin{pmatrix} R(t_1) & & \\ & \ddots & \\ & & R(t_n) \end{pmatrix}$, so wird der maximale Torus von $U(n)$ auf den maximalen Torus T von $SO(2n)$ abgebildet.

Über J wird nun auch $L(U(n))$ in $L(SO(2n))$ eingebettet. Der $(2n^2 - n)$-dimensionale Raum $L(SO(2n)) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) : A^\top = -A\}$ wird erzeugt von den Matrizen
$$\begin{aligned} D_i(t) &:= E_{ii} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \text{ für } i = 1, \ldots, n, \\ M_{ij}(a,b) &:= E_{ij} \otimes \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - E_{ji} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ für } i < j, \\ \text{und } N_{ij}(a,b) &:= E_{ij} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} - E_{ji} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ für } i < j. \end{aligned}$$
Zusammen ergibt das die Dimension $n + 2 \cdot \frac{n^2-n}{2} + 2 \cdot \frac{n^2-n}{2} = 2n^2 - n$.

Die Matrizen $D_i(t)$ ergeben $L(T)$, die Matrizen $M_{ij}(a,b)$ sind die Bilder von $M_{ij}(z) := z \cdot E_{ij} - \overline{z} \cdot E_{ji} \in L(U(n))$, mit $z = a + \mathsf{i}\, b$. Das liefert schon mal die Wurzeln $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, für $i < j$.

Nun rechnet man für $D := \sum_{i=1}^n D_i(t_i)$ nach:
$$[D, N_{ij}(a,b)] = (t_i + t_j) \cdot N_{ij}(-b, a) = \mathsf{i}\,(t_i + t_j) \cdot N_{ij}(a,b),$$
denn es ist $\mathsf{i} \cdot N_{ij}(a,b) = N_{ij}(-b,a)$. Das ergibt die Wurzeln $\varepsilon_i + \varepsilon_j$, für $i < j$.

Nun ist noch folgendes zu beachten: Ist $\mathsf{i}\,\alpha_{ij}$ (mit $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$) ein Eigenwert des reellen Endomorphismus $X \mapsto [D, X]$, so muss auch $-\mathsf{i}\alpha_{ij}$ ein Eigenwert sein. Damit haben wir alle (infinitesimalen) Wurzeln von $SO(2n)$:

$$\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \text{ für } 1 \leq i < j \leq n,$$

wobei $\varepsilon_i(\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu D_\nu(1)) := t_i$ ist, für $i = 1, \ldots, n$. Das sind $4 \cdot \frac{n^2-n}{2} = 2n^2 - 2n = \dim(SO(2n)) - \dim(T)$ Wurzeln, und genau so viele muss es geben.

Im Falle der Gruppe $SO(2n+1)$ kommen noch die Wurzeln $\pm\varepsilon_i$ dazu,