Kapitel 2 Spin-Strukturen

§ 1 Liegruppen

Definition.
Eine *Liegruppe* ist eine Gruppe G, die zugleich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, so dass die Abbildungen $G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$, und $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, differenzierbar sind.

Ein *Homomorphismus von Liegruppen* ist ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ zwischen zwei Liegruppen, der zugleich differenzierbar ist.

Beispiele.

1. Jede endliche Gruppe ist eine Liegruppe.

2. Der $\mathbb{R}^n$ mit der Vektoraddition ist eine Liegruppe.

3. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, mit der gewöhnlichen Multiplikation komplexer Zahlen, ist eine Liegruppe.

   Das kartesische Produkt $G_1 \times \ldots \times G_k$ von endlich vielen Liegruppen ist wieder eine, insbesondere der n-dimensionale Torus $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$.

4. Sei V ein n-dimensionaler k-Vektorraum ($k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Dann ist $\mathrm{Aut}_k(V) = \{f \in \mathrm{End}_k(V) : \det(f) \neq 0\}$ als offene Teilmenge eines endlich-dimensionalen Vektorraumes eine Liegruppe, isomorph zu $\mathrm{GL}_n(k)$.

5. Man kann zeigen:

   Eine abgeschlossene Untergruppe H einer Liegruppe G ist wieder eine Liegruppe.

   Also ist z.B. $SL_n(k) = \{A \in \mathrm{GL}_n(k) : \det(A) = 1\}$ eine Liegruppe. Außerdem gilt:

   Ein stetiger Homomorphismus zwischen Liegruppen ist differenzierbar.

   Beweise zu diesen Sätzen findet man z.B. in [War].

6. Die Abbildung $\det : \mathrm{GL}_n(k) \to k^\times$ ist ein Homomorphismus von Liegruppen. Andere Beispiele sind die *Exponentialabbildung* $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ (mit $\exp(t) := e^{\mathrm{i}\,t}$) und die *inneren Automorphismen* $i_g : G \to G$ mit $i_g(x) := gxg^{-1}$, für $g \in G$.

Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so bildet die Menge $\mathrm{Diff}(X)$ aller Diffeomorphismen von X auf sich eine Gruppe. Ist G eine Liegruppe, so versteht man unter einer *(Liegruppen-)Operation* von G auf X einen Homomorphismus $\varrho : G \to \mathrm{Diff}(X)$. Wie üblich schreibt man gx an Stelle von $\varrho(g)x$. Ist X ein Vektorraum und $\varrho(g)$ linear für alle $g \in G$, so spricht man von einer *linearen Operation* oder einer *Darstellung*.

Die Zuordnung $g \mapsto i_g$ liefert eine Operation von G auf sich selbst. Ähnliche Operationen sind die *Linkstranslationen* $L_g : h \mapsto gh$ und die *Rechtstranslationen* $R_g : h \mapsto hg$, für $g \in G$. Offensichtlich ist $i_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$.

Ist $g \in G$ und $v \in T_g(G)$ ein Tangentialvektor an G in g, so gibt es einen differenzierbaren Weg $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ mit $\alpha(0) = g$ und $\alpha'(0) = v$.[1]

Ist $v = \alpha'(0) \in T_g(G)$, so liegt $(L_h)_* v := (L_h \circ \alpha)'(0)$ in $T_{hg}(G)$. Die lineare Abbildung $(L_h)_* : T_g(G) \to T_{hg}(G)$ ist ein Isomorphismus.

Eine besondere Rolle spielt der Tangentialraum $T_e(G)$ im neutralen Element $e \in G$. Mit Hilfe einer geeigneten Linkstranslation kann man jeden Tangentialvektor in den Raum $T_e(G)$ transportieren. Speziell setzen wir

$$T_\alpha(t) := (L_{\alpha(t)})_*^{-1} \alpha'(t).$$

Das ist gewissermaßen der „Schatten", den der Tangentialvektor in $T_e(G)$ wirft. Ist σ eine Parameter-Transformation, so ist

$$(\alpha \circ \sigma)'(s) = \sigma'(s) \cdot \alpha'(\sigma(s)) \quad \text{und} \quad T_{\alpha\circ\sigma}(s) = \sigma'(s) \cdot T_\alpha(\sigma(s)).$$

Ist $g \in G$, so ist

$$T_{L_g \circ \alpha}(t) = T_\alpha(t),$$

denn es ist

$$\begin{aligned} T_{L_g\circ\alpha}(t) &= (L_{g\alpha(t)})_*^{-1}(L_g \circ \alpha)'(t) \\ &= (L_{\alpha(t)})_*^{-1} \circ (L_g)_*^{-1} \circ (L_g)_*(\alpha'(t)) \\ &= (L_{\alpha(t)})_*^{-1} \alpha'(t) \;=\; T_\alpha(t). \end{aligned}$$

$T(G) := G \times T_e(G)$ nennt man das *Tangentialbündel* von G. Offensichtlich ist dies eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ist $g \in G$, so kann man ein Element $(g, v) \in T(G)$ mit dem Tangentialvektor $(L_g)_* v \in T_g(G)$ identifizieren. Ist $w \in T_g(G)$ gegeben, so gehört dazu das Paar $(g, (L_g)_*^{-1} w) \in G \times T_e(G)$.

Definition.
Ein *(differenzierbares) Vektorfeld* auf G ist eine differenzierbare Abbildung

$$\xi : G \to T(G) \quad \text{mit } \mathrm{pr}_1 \circ \xi = \mathrm{id}_G,$$

[1]Zur genauen Definition von $\alpha'(0)$ siehe Anhang D

also eine Abbildung der Gestalt $\xi(g) = (g, \widetilde{\xi}(g))$, mit einer differenzierbaren Abbildung $\widetilde{\xi} : G \to T_e(G) \cong \mathbb{R}^n$. Durch die Vorschrift

$$g \mapsto \xi_g := (L_g)_* \widetilde{\xi}(g)$$

ordnet ein Vektorfeld jedem Punkt $g \in G$ einen Tangentialvektor $\xi_g \in T_g(G)$ zu.

Das Vektorfeld ξ heißt *links-invariant*, falls gilt:

$$(L_h)_* \xi_g = \xi_{hg}, \text{ für alle } g, h \in G.$$

1.1 Satz. *Ein Vektorfeld ξ auf G ist genau dann links-invariant, wenn $g \mapsto \widetilde{\xi}(g)$ konstant ist.*

Beweis: Es ist

$$(L_h)_* \xi_g = \xi_{hg} \iff (L_{hg})_* \widetilde{\xi}(g) = (L_{hg})_* \widetilde{\xi}(hg), \text{ für alle } h, g.$$

Weil $(L_{hg})_*$ ein Isomorphismus ist, ist die rechte Aussage äquivalent zu der Gleichung $\widetilde{\xi}(g) = \widetilde{\xi}(hg)$, für alle g, h, und das ist äquivalent dazu, dass $\widetilde{\xi}$ konstant ist.
∎

Offensichtlich kann man die Menge der linksinvarianten Vektorfelder mit dem Tangentialraum $T_e(G)$ identifizieren.

Definition.
Unter der *Liealgebra* $L(G)$ einer Liegruppe G versteht man den Tangentialraum $T_e(G)$.

Zunächst ist die Liealgebra nur ein Vektorraum. Die Algebra-Struktur lernen wir später kennen.

Definition.
Sei ξ ein Vektorfeld auf G. Eine *Integralkurve* von ξ ist eine differenzierbare Kurve $\alpha : I \to G$ mit $\alpha'(t) = \xi_{\alpha(t)}$.

Bemerkung. Ist $\alpha : I \to X$ Integralkurve von ξ und $a \in \mathbb{R}$, so ist auch $\widetilde{\alpha} : a + I \to X$ mit $\widetilde{\alpha}(t) := \alpha(t - a)$ eine Integralkurve von ξ (denn es ist $\widetilde{\alpha}'(t) = \alpha'(t - a) = \xi_{\alpha(t-a)} = \xi_{\widetilde{\alpha}(t)}$).

Weil $(L_{\alpha(t)})_* T_\alpha(t) = \alpha'(t)$ und $\xi_{\alpha(t)} = (L_{\alpha(t)})_* \widetilde{\xi}(\alpha(t))$ ist, folgt:

1.2 Satz. *$\alpha : I \to G$ ist genau dann Integralkurve von ξ, wenn $T_\alpha(t) = \widetilde{\xi}(\alpha(t))$ ist.*

Sei $g_0 \in G$, $U = U(g_0) \subset G$ eine offene Umgebung und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Karte für G. Für $g \in U$ können wir $T_{\varphi(g)}(\mathbb{R}^n)$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Setzen wir $F(\mathbf{x}) := \varphi_* \xi_{\varphi^{-1}(\mathbf{x})} \in \mathbb{R}^n$, für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, so gilt für eine Integralkurve α:

$$F(\varphi \circ \alpha(t)) = \varphi_* \xi_{\alpha(t)} = \varphi_* \alpha'(t) = (\varphi \circ \alpha)'(t).$$

Das Auffinden einer Integralkurve entspricht also dem Lösen der Differentialgleichung $y' = F(y)$. Aus der Theorie der DGLn folgt:

1.3 Satz. *Sei ξ ein differenzierbares Vektorfeld auf G. Dann gibt es eine offene Teilmenge $\mathscr{U} \subset \mathbb{R} \times G$ und eine differenzierbare Abbildung $\Phi : \mathscr{U} \to G$, so dass gilt:*

1. *Für jedes $g \in G$ ist $I_g = \{t \in \mathbb{R} : (t, g) \in \mathscr{U}\}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I_g$.*

2. *Für jedes $g \in G$ ist $\Phi^{(g)} : I_g \to G$ mit $\Phi^{(g)}(t) := \Phi(t, g)$ die maximale Integralkurve von ξ mit $\Phi^{(g)}(0) = g$.*

Es folgt dann, dass $\Phi(s, \Phi(t, g)) = \Phi(s + t, g)$ ist, sofern die linke Seite definiert ist.

BEWEIS: Die Existenz von $\mathscr{U}$ und Φ folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für DGLn. Die Zusatzgleichung folgt, weil $s \mapsto \Phi(s, \Phi(t, g))$ und $s \mapsto \Phi(s+t, g)$ beides Integralkurven von ξ durch $\Phi(t, g)$ sind. ■

Man nennt Φ den *maximalen Fluss* des Vektorfeldes ξ. Er ist eindeutig bestimmt.

Zu jedem Punkt $g_0 \in G$ gibt es also eine offene Umgebung $U = U(g_0) \subset G$ und ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ um 0, so dass es zu jedem $g \in U$ eine Integralkurve $\Phi_g : I \to G$ für ξ mit $\Phi_g(0) = g$ gibt. Insbesondere ist dann

$$T_{\Phi_g}(t) = \widetilde{\xi}(\Phi(t, g)).$$

Die Abbildung $\Phi : I \times U \to G$ mit $\Phi(t, g) = \Phi_g(t)$ nennt man einen *lokalen Fluss* von ξ.

Für festes, kleines t ist $\Phi_t(g) = \Phi(t, g)$ ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $U_t \subset G$. Speziell ist $\Phi_0 = \mathrm{id}_U$ und $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$.

Definition.

Sei ξ ein Vektorfeld auf G. Die *Lie-Ableitung* einer differenzierbaren Funktion f auf G bezüglich ξ wird definiert durch

$$(\mathscr{L}_\xi f)(g) := (f \circ L_g \circ \alpha)'(0),$$

wobei α eine Kurve mit $\alpha(0) = e$ und $\alpha'(0) = \widetilde{\xi}(g)$ ist.

1.4 Satz. *Ist f auf G differenzierbar, so ist auch $\mathscr{L}_\xi f$ differenzierbar.*

BEWEIS: Wir brauchen lokale Koordinaten. Sei $U = U(e) \subset G$ offen und $\varphi : U \to W \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. Dann können wir das Element $\widetilde{\xi}(g)$ in der Form

$$\widetilde{\xi}(g) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi^\nu(g) D_\nu^{(\varphi)}$$

schreiben (vgl. Anhang D), mit differenzierbaren Funktionen $\xi^\nu : U \to \mathbb{R}$.

Sei nun $g \in G$, $\alpha : I \to G$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = e$ und $\alpha'(0) = \widetilde{\xi}(g)$. Dann ist

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\xi^1(g), \ldots, \xi^n(g))$$

und

$$\begin{aligned} (\mathscr{L}_\xi f)(g) &= (f \circ L_g \circ \alpha)'(0) \\ &= ((f \circ L_g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha))'(0) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial (f \circ L_g \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(e)) \xi^\nu(g) \end{aligned}$$

Diese Funktion ist differenzierbar. Ist nämlich

$$F(g, \mathbf{x}) := f \circ L_g \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}) = f(g \cdot \varphi^{-1}(\mathbf{x})),$$

so hängt $\dfrac{\partial F}{\partial x_\nu}(g, \mathbf{x})$ differenzierbar von g ab. ∎

1.5 Satz. *Der Operator $\mathscr{L}_\xi : \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathscr{C}^\infty(X)$ hat folgende Eigenschaften:*

1. *$\mathscr{L}_\xi$ ist $\mathbb{R}$-linear.*
2. *$\mathscr{L}_\xi(f \cdot g) = f \cdot \mathscr{L}_\xi g + g \cdot \mathscr{L}_\xi f$.*

Also ist $\mathscr{L}_\xi$ eine Derivation auf X (vgl. Anhang D).

Der Beweis ist eine einfache Rechnung.

1.6 Satz. *Ein Vektorfeld ξ ist genau dann links-invariant, wenn $\mathscr{L}_\xi(f \circ L_g) = (\mathscr{L}_\xi f) \circ L_g$ für alle $g \in G$ und alle $f \in \mathscr{C}^\infty(G)$ gilt.*

Beweis: Sei ξ links-invariant. Dann ist $v := \widetilde{\xi}(e) = \widetilde{\xi}(g)$ für alle $g \in G$. Wir halten ein beliebiges g fest und wählen eine Kurve α mit $\alpha(0) = e$ und $\alpha'(0) = v$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_\xi(f \circ L_g)(h) &= ((f \circ L_g) \circ L_h \circ \alpha)'(0) \\ &= (f \circ L_{gh} \circ \alpha)'(0) \\ &= (\mathscr{L}_\xi f)(gh) \;=\; (\mathscr{L}_\xi f) \circ L_g(h), \text{ für alle } h. \end{aligned}$$

Sei umgekehrt $\mathscr{L}_\xi(f \circ L_g) = (\mathscr{L}_\xi f) \circ L_g$ für alle g und alle f. Wieder halten wir ein g fest und wählen zwei Kurven α, β mit $\alpha(0) = \beta(0) = e$, $\alpha'(0) = \widetilde{\xi}(g)$ und $\beta'(0) = \widetilde{\xi}(e)$. Dann gilt:

$$(f \circ L_g \circ \alpha)'(0) = \mathscr{L}_\xi f(g) = (\mathscr{L}_\xi f) \circ L_g(e) = \mathscr{L}_\xi(f \circ L_g)(e) = (f \circ L_g \circ \beta)'(0).$$

Setzt man für f die Funktionen $x_\nu \circ L_g^{-1}$ ein (mit lokalen Koordinaten x_ν), so erhält man $\alpha'(0) = \beta'(0)$. Das zeigt, dass ξ linksinvariant ist. ∎

Aus dem Beweis ergibt sich auch, dass ξ durch den Operator $\mathscr{L}_\xi$ vollständig bestimmt ist. Es ist $\xi^\nu(g) = \mathscr{L}_\xi(x_\nu \circ L_g^{-1})(g)$, für $\nu = 1, \ldots, n$.

Die Menge $\Lambda(G) := \{D \in \mathrm{Der}(G) \,:\, D(f \circ L_g) = (Df) \circ L_g,\ \forall\, g \in G \text{ und } f \in \mathscr{C}^\infty(G)\}$ bildet einen Untervektorraum von $\mathrm{Der}(G)$.

1.7 Satz. *Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathscr{V}(G)$ aller differenzierbaren Vektorfelder auf G wird durch $\xi \mapsto \mathscr{L}_\xi$ linear und bijektiv auf* $\mathrm{Der}(G)$ *abgebildet. Das Bild der linksinvarianten Vektorfelder ist der Raum $\Lambda(G)$.*

Beweis: Die Vektorraum-Struktur auf $\mathscr{V}(G)$ ist gegeben durch

$$(a \cdot \xi + b \cdot \eta)_g = a \cdot \xi_g + b \cdot \eta_g.$$

Nun ist $\mathscr{L}_\xi f(g) = (f \circ L_g \circ \alpha)'(0)$, wobei $\alpha(0) = e$ und $\alpha'(0) = \widetilde{\xi}(g)$ ist, also $L_g \circ \alpha(0) = g$ und $(L_g \circ \alpha)'(0) = (L_g)_* \widetilde{\xi}(g) = \xi_g$. Das bedeutet:

$$\mathscr{L}_\xi f(g) = (\theta_g \xi_g)(f),$$

wenn wir – wie in Anhang D – mit θ_g den kanonischen Isomorphismus $T_g(G) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}_g, \mathbb{R})$ bezeichnen. Daraus folgt ganz leicht, dass die Zuordnung $\xi \mapsto \mathscr{L}_\xi$ linear ist.

Zur **Injektivität**: Ist $\xi \neq 0$, so gibt es ein $g \in G$ mit $\xi_g \neq 0$, und dann ist auch $\widetilde{\xi}(g) \neq 0$. Ist $\alpha(0) = e$ und $\alpha'(0) = \widetilde{\xi}(g)$, so muss es eine offene Umgebung $U = U(e) \subset G$ und eine differenzierbare Funktion f auf U geben, so dass $(f \circ \alpha)'(0) \neq 0$ ist. Es gibt eine offene Umgebung $V = V(e) \subset U$ und eine differenzierbare Funktion $\widehat{f}$ auf G, so dass $\widehat{f}|_V = f|_V$ ist. Dann ist

$$\mathscr{L}_\xi(\widehat{f} \circ L_g^{-1})(g) = (\widehat{f} \circ L_g^{-1} \circ L_g \circ \alpha)'(0) = (f \circ \alpha)'(0) \neq 0,$$

also $\mathscr{L}_\xi \neq 0$.

Zur **Surjektivität**: Sei $D \in \mathrm{Der}(G)$ gegeben. Dann können wir in jedem Punkt $g \in G$ eine Derivation δ_g auf $\mathscr{E}_g$ definieren, durch

$$\delta_g(f) := D(\widehat{f})(g), \text{ wobei } \widehat{f} \in \mathscr{C}^\infty(G) \text{ und } \widehat{f} = f \text{ nahe } g \text{ ist.}$$

Um zu sehen, dass δ_g wohl-definiert ist, muss man zeigen: Ist $U = U(g) \subset G$ offen, $h \in \mathscr{C}^\infty(G)$ und $h|_U = 0$, so ist $D(h)(g) = 0$. Das wird im Anhang D bewiesen.

Zu einem fest gewählten $g \in G$ gibt es nun einen Weg α_g mit $\alpha_g(0) = g$ und $(f \circ \alpha_g)'(0) = \delta_g(f)$ für $f \in \mathscr{E}_g$. Wir setzen $\xi_g := \alpha_g'(0) \in T_g(G)$ (das ist wohldefiniert) und $\widetilde{\xi}(g) := (L_g)_*^{-1}\xi_g = (L_g^{-1} \circ \alpha_g)'(0)$. Das ergibt ein Vektorfeld ξ auf G, von dem wir allerdings noch nicht wissen, ob es differenzierbar ist.

Es gilt aber für beliebiges $g \in G$ und $f \in \mathscr{C}^\infty(G)$:

$$(f \circ L_g \circ (L_g^{-1} \circ \alpha_g))'(0) = (f \circ \alpha_g)'(0) = \delta_g(f) = Df(g).$$

Also ist $(\mathscr{L}_\xi f)(g)$ differenzierbar. Weil das für alle f gilt, muss auch ξ differenzierbar sein.

Die letzte Aussage des Satzes ist klar (Satz 1.6). ∎

1.8 Satz. *Sind $\xi, \eta \in \mathscr{V}(G)$, so gibt es ein Vektorfeld $[\xi, \eta]$ auf G mit*

$$\mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\eta - \mathscr{L}_\eta \circ \mathscr{L}_\xi = \mathscr{L}_{[\xi,\eta]}.$$

Sind ξ und η linksinvariant, so ist auch $[\xi, \eta]$ links-invariant.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $\mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\eta - \mathscr{L}_\eta \circ \mathscr{L}_\xi$ eine Derivation ist. Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_\xi\mathscr{L}_\eta - \mathscr{L}_\eta\mathscr{L}_\xi)(f \cdot g) &= \mathscr{L}_\xi(f \cdot \mathscr{L}_\eta g + g \cdot \mathscr{L}_\eta f) - \mathscr{L}_\eta(f \cdot \mathscr{L}_\xi g + g \cdot \mathscr{L}_\xi f)\\ &= f \cdot \mathscr{L}_\xi\mathscr{L}_\eta g + \mathscr{L}_\xi f \cdot \mathscr{L}_\eta g + g \cdot \mathscr{L}_\xi\mathscr{L}_\eta f + \mathscr{L}_\xi g \cdot \mathscr{L}_\eta f\\ &\quad - f \cdot \mathscr{L}_\eta\mathscr{L}_\xi g - \mathscr{L}_\eta f \cdot \mathscr{L}_\xi g - g \cdot \mathscr{L}_\eta\mathscr{L}_\xi f - \mathscr{L}_\eta g \cdot \mathscr{L}_\xi f\\ &= f \cdot (\mathscr{L}_\xi\mathscr{L}_\eta - \mathscr{L}_\eta\mathscr{L}_\xi)(g) + g \cdot (\mathscr{L}_\xi\mathscr{L}_\eta - \mathscr{L}_\eta\mathscr{L}_\xi)(f).\end{aligned}$$

Sind ξ und η links-invariant, so ist $(\mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\eta)(f \circ L_g) = (\mathscr{L}_\xi\mathscr{L}_\eta f) \circ L_g$, und daraus folgt, dass $[\xi, \eta]$ links-invariant ist. ∎

Definition.

Sind ξ, η zwei linksinvariante Vektorfelder auf G, so definiert man die *Lie-Klammer* $[\xi, \eta]$ durch

$$\mathscr{L}_{[\xi,\eta]} = \mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\eta - \mathscr{L}_\eta \circ \mathscr{L}_\xi.$$

Die Lieklammer von zwei Elementen der Liealgebra $L(G)$ wird mit Hilfe der Identfikation zwischen $L(G) = T_e(G)$ und dem Raum der linksinvarianten Vektorfelder erklärt.

Mit der Lie-Klammer wird $L(G)$ zu einer (i.a. nicht-assoziativen) $\mathbb{R}$-Algebra.

1.9 Satz. *Sei ξ ein links-invariantes Vektorfeld. Ist $\alpha : I \to G$ eine Integralkurve von ξ, so ist auch $\beta := L_g \circ \alpha : I \to G$ eine Integralkurve von ξ.*

Beweis: Ist α eine beliebige Kurve, so ist $T_{L_g \circ \alpha}(t) = T_\alpha(t)$, für alle $g \in G$. Ist α Integralkurve des Vektorfeldes ξ, so ist $T_\alpha(t) = \widetilde{\xi}(\alpha(t))$. Ist ξ links-invariant, so ist $\widetilde{\xi}$ konstant, also auch $T_{L_g \circ \alpha}(t) = \widetilde{\xi}(L_g \circ \alpha(t))$. Das bedeutet, dass $L_g \circ \alpha$ Integralkurve von ξ ist. ∎

Bemerkung. Ist ξ_v das durch $v \in L(G)$ bestimmte links-invariante Vektorfeld, so ist α genau dann Integralkurve für ξ_v, wenn $T_\alpha(t) \equiv v$ ist.

Definition.
Eine *Ein-Parameter-Gruppe* in G ist ein Liegruppen-Homomorphismus $\alpha : \mathbb{R} \to G$. Speziell ist dann $\alpha(0) = e$.

1.10 Satz. *Sei $\mathscr{P}_G$ die Menge aller Ein-Parameter-Gruppen in G. Dann ist die durch $\alpha \mapsto \alpha'(0)$ gegebene Abbildung $\mathscr{P}_G \to L(G)$ bijektiv.*

BEWEIS: 1) Surjektivität:

Sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ eine Integralkurve des links-invarianten Vektorfeldes ξ_v (mit $\widetilde{\xi_v} \equiv v$), mit $\alpha(0) = e$ (und $\alpha'(0) = v$). Sei nun $\alpha_1(t) := \alpha(s)\alpha(t)$ und $\alpha_2(t) := \alpha(s+t)$, für $|s| < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $|t| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dann ist $\alpha_1(0) = \alpha(s)$ und $\alpha_2(0) = \alpha(s)$, und es gilt:

$$\alpha_1'(t) = (L_{\alpha(s)} \circ \alpha)'(t) = (L_{\alpha(s)})_* \alpha'(t) = (L_{\alpha_1(t)})_* T_\alpha(t) = (L_{\alpha_1(t)})_* v$$

und

$$\alpha_2'(t) = \alpha'(s+t) = (L_{\alpha(s+t)})_* T_\alpha(s+t) = (L_{\alpha_2(t)})_* v.$$

Das bedeutet, dass α_1 und α_2 Integralkurven von ξ durch $\alpha(s)$ sind. Daraus folgt, dass $\alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t)$ für kleine s, t gilt.

Ist t „groß“, so setzen wir $\widehat{\alpha}(t) := \alpha(t/n)^n$, mit genügend großem n. Dabei hängt die Definition von $\widehat{\alpha}$ nicht von dem gewählten n ab, denn es ist

$$\alpha(\frac{t}{n})^n = \alpha(m \cdot \frac{t}{mn})^n = \alpha(\frac{t}{mn})^{mn} = \alpha(\frac{t}{m})^m.$$

Offensichtlich ist $\widehat{\alpha}$ eine Ein-Parameter-Gruppe in G, die nahe 0 mit α übereinstimmt, und es ist $\widehat{\alpha}'(0) = \alpha'(0) = v$.

2) Injektivität.

Sei α eine Ein-Parameter-Gruppe mit $\alpha'(0) = v$, und ξ_v das durch v bestimmte links-invariante Vektorfeld. Dann ist

$$\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s) = (L_{\alpha(t)} \circ \alpha)(s)$$

und

$$\alpha'(t) = (L_{\alpha(t)} \circ \alpha)'(0) = (L_{\alpha(t)})_* \alpha'(0) = (L_{\alpha(t)})_* v,$$

also $T_\alpha(t) = v$. Damit ist α Integralkurve von ξ_v durch e und dadurch eindeutig bestimmt. ∎

Definition.
Die *Exponentialabbildung* $\exp : L(G) \to G$ wird definiert durch $\exp(v) := \alpha_v(1)$, wobei α_v die Ein-Parameter-Gruppe mit $\alpha_v'(0) = v$ ist.

1.11 Satz. *Ist $v \in L(G)$ und ξ_v das zugehörige linksinvariante Vektorfeld, so ist $\alpha_v(t) = \exp(tv)$, und α_v ist die Integralkurve von ξ_v durch e.*

Beweis: Es ist $\exp(tv) = \alpha_{tv}(1)$. Wir müssen also zeigen, dass $\alpha_{tv}(1) = \alpha_v(t)$ ist. Dazu sei $\beta_t(s) := \alpha_v(st)$. Dann ist

$$\beta_t(s + s') = \alpha_v(st + s't) = \alpha_v(st)\alpha_v(s't) = \beta_t(s)\beta_t(s'),$$

also β_t eine Ein-Parameter-Gruppe. Außerdem ist $\beta_t'(s) = t \cdot \alpha_v'(st)$, also $\beta_t'(0) = t \cdot \alpha_v'(0) = tv$. Also ist $\beta_t = \alpha_{tv}$ und daher $\alpha_{tv}(1) = \beta_t(1) = \alpha_v((t)$.

Dass α_v Integralkurve von ξ_v ist, wurde oben schon gezeigt. ∎

1.12 Satz. *Sei $v \in L(G)$. Dann wird durch $\Phi(t, g) := L_g \circ \exp(tv)$ ein globaler Fluss für das Vektorfeld ξ_v gegeben (Definition des globalen Flusses: Anhang D).*

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $t \mapsto \alpha^g(t) := \Phi(t, g)$ für jedes feste g eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Integralkurve von ξ_v mit $\alpha^g(0) = g$ ist. Für $g = e$ haben wir das oben schon gezeigt. Ist aber g beliebig, so ist auch $\alpha^g = L_g \circ \alpha^e$ wieder eine Integralkurve von ξ_v, mit $\alpha^g(0) = g$. ∎

Wir wollen nun sehen, dass die Exponentialabbildung $\exp : L(G) \to G$ differenzierbar ist.

$G \times L(G)$ ist eine Liegruppe, wenn man die Gruppenstruktur komponentenweise erklärt. Für $(g, v) \in G \times L(G)$ wird die Linkstranslation $L_{(g,v)} : G \times L(G) \to G \times L(G)$ gegeben durch $L_{(g,v)}(h, w) = (gh, w + v)$. Also ist

$$(L_{(g,v)})_*(\alpha'(t), u) = ((L_g)_*\alpha'(t), u) = ((L_g \circ \alpha)'(t), u).$$

Durch $F(g, v) = (g, v, \widetilde{F}(g, v))$ mit $\widetilde{F}(g, v) := (v, 0)$ wird ein links-invariantes Vektorfeld F auf $G \times L(G)$ definiert. Es ist $F_{(g,v)} = ((L_g)_*v, 0)$.

Für $v \in L(G)$ ist $\varphi_v(t, g) := L_g \circ \exp(tv)$ der Fluss des links-invarianten Vektorfeldes ξ_v. Wir setzen $\Phi(t, g, v) := (\varphi_v(t, g), v)$. Dann ist Φ der Fluss von F, denn es ist $\Phi(0, g, v) = (g, v)$ und

$$\Phi'_{(g,v)}(t) = ((\varphi_v)'_g(t), 0) = ((L_{\varphi_v(t,g)})_*v, 0) = F_{\Phi(t,g,v)}.$$

Nun ist $\mathrm{pr}_1(\Phi(1, e, v)) = \varphi_v(1, e) = \exp(v)$, und weil Φ differenzierbar ist, ist auch exp differenzierbar.

Für $v \in L(G)$ sei $h_v(t) := tv$. Durch $v \mapsto h_v'(0)$ wird ein Isomorphismus $L(G) \cong T_eL(G)$ definiert. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$\exp_* v = \exp_* h_v'(0) = (\exp \circ h_v)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(tv) = v,$$

also exp in der Nähe von 0 ein Diffeomorphismus.

1.13 Satz. *Ist $\varphi : G \to H$ ein Liegruppen-Homomorphismus und*

$$\varphi' := \varphi_* : L(G) \to L(H),$$

so erhält man folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & L(G) & \xrightarrow{\varphi'} & L(H) & \\ \exp & \downarrow & & \downarrow & \exp \\ & G & \xrightarrow{\varphi} & H & \end{array}$$

Beweis: Ist $v \in L(G)$, so ist $\varphi \circ \alpha_v$ eine Ein-Parameter-Gruppe in H mit

$$(\varphi \circ \alpha_v)'(0) = \varphi'(\alpha_v'(0)) = \varphi'(v).$$

Also ist $\exp(\varphi' v) = \varphi \circ \alpha_v(1) = \varphi(\exp(v))$. ∎

Eine Gruppe G wird von einer Teilmenge $E \subset G$ *erzeugt*, wenn jedes Element von G Produkt von Elementen aus E ist.

1.14 Satz. *Sei $G_0 \subset G$ die Zusammenhangskomponente der Eins in einer Liegruppe G, $U = U(e) \subset G_0$ eine offene Umgebung. Dann ist G_0 eine von U erzeugte Untergruppe von G.*

Beweis: Es seien $g, h \in G_0$. Dann gibt es stetige Wege $\alpha : [0,1] \to G_0$ und $\beta : [0,1] \to G_0$ mit $\alpha(0) = \beta(0) = e$, $\alpha(1) = g$ und $\beta(1) = h$. Dann ist $t \mapsto \alpha(t)\beta(t)^{-1}$ ein stetiger Weg von e nach gh^{-1}. Also liegt gh^{-1} in G_0, d.h., G_0 ist Untergruppe. Sei $G_1 \subset G_0$ die von U erzeugte Untergruppe von G_0. Weil mit U auch gU in G_1 enthalten ist, für alle $g \in G_1$, ist G_1 offen in G_0. Dann sind aber auch alle Nebenklassen gG_1, $g \in G_0$, offen in G_0. Da G_0 Vereinigung dieser Nebenklassen ist, ist auch $G_0 \setminus G_1$ offen, also G_1 abgeschlossen in G_0. Das geht nur, wenn $G_1 = G_0$ ist. ∎

1.15 Satz. *Ist G zusammenhängend und $\varphi : G \to H$ ein Liegruppen-Homomorphismus, so ist φ durch $\varphi' : L(G) \to L(H)$ vollständig bestimmt.*

Beweis: Es gibt offene Umgebungen $U = U(0) \subset L(G)$ und $V = V(e) \subset G$, so dass $\exp : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Aber weil G zusammenhängend ist, wird G von V erzeugt. Also ist φ durch $\varphi|_V$ festgelegt. Wegen der Beziehung $\varphi \circ \exp = \exp \circ \varphi'$ ist $\varphi(V) = \varphi(\exp(U)) = \exp(\varphi'(U))$. ∎

Das wichtigste Beispiel einer Liegruppe ist natürlich die Gruppe $\mathrm{GL}_n(k)$. Wir beschränken uns hier erst mal auf den Fall $k = \mathbb{R}$.

Da $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge des Vektorraums $M_n(\mathbb{R})$ ist, ist $L(G) = T_E(G) = M_n(\mathbb{R})$.

G besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten (gegeben durch $\det(A) > 0$ bzw. $\det(A) < 0$). Das sieht man folgendermaßen:

Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Multiplikation von links mit der Elementar-Matrix $P_{ij}(\alpha) := E_n + \alpha \cdot E_{ij}$, $i \neq j$, sorgt dafür, dass in A das α-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile addiert wird. Dabei ist $\det(P_{ij}(\alpha) \cdot A) = \det(A)$. Nach endlich vielen solchen Operationen erhält man eine Matrix der Gestalt $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ mit $A' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ und $\det(A') = \det(A)$. Nun iteriert man das Verfahren, und schließlich erhält man die Matrix $A_{n-1} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mit $a = \det(A)$. Die Elementarmatrizen kann man innerhalb $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ stetig in die Einheitsmatrix deformieren. Ist $\det(A) > 0$, so kann man A_{n-1} innerhalb $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,:\, \det(X) > 0\}$ stetig mit der Einheitsmatrix E_n verbinden. Also ist $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ die Zusammenhangskomponente der 1 in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Der gleiche Beweis liefert, dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ zusammenhängend sind. Dass die komplette Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *nicht* zusammenhängend ist, sieht man mit Hilfe des Zwischenwertsatzes (angewandt auf die Determinante).

1.16 Satz. *Für $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ist $[A, B] = AB - BA$.*

Beweis: Sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $M = M_n(\mathbb{R}) = L(G)$. Ist $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $L_B : G \to G$ die Links-Translation, $X \in M$ und $\alpha_X(t) := \exp(tX)$, also $\alpha'_X(0) = X$, so ist

$$(L_B)_* X = \frac{d}{dt}\Big|_0 B \cdot \alpha_X(t) = BX.$$

Für $A \in M$ sei ξ_A das zugehörige links-invariante Vektorfeld und $\mathscr{L}_A := \mathscr{L}_{\xi_A}$ die zugehörige Lie-Ableitung. Dann ist

$$\mathscr{L}_A f(X) = (f \circ L_X \circ \alpha_A)'(0), \text{ für } X \in G,\ A \in M \text{ und } f \in \mathscr{C}^\infty(G).$$

Ist f Einschränkung einer linearen Funktion $F : M \to \mathbb{R}$ auf G, so ist

$$\mathscr{L}_A f(X) = \frac{d}{dt}\Big|_0 F(X \cdot \alpha_A(t)) = F(XA),$$

also $\mathscr{L}_A f$ Einschränkung der linearen Funktion $F \circ R_A$. Insbesondere ist $\mathscr{L}_A f(1) = F(A)$. Daraus folgt:

$$\mathscr{L}_A \circ \mathscr{L}_B f(1) = \mathscr{L}_A(\mathscr{L}_B f)(1) = F \circ R_B(A) = F(AB).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} F([A,B]) &= \mathscr{L}_{[A,B]} f(1) \\ &= (\mathscr{L}_A \circ \mathscr{L}_B f - \mathscr{L}_B \circ \mathscr{L}_A f)(1) \\ &= F(AB) - F(BA) \ = \ F(AB - BA). \end{aligned}$$

Da dies für alle Linearformen F gilt, ist $[A, B] = AB - BA$. ∎

Definition.
Eine *Liealgebra* (über einem Körper k) ist ein k-Vektorraum $\mathfrak{g}$ mit einer Bilinearform $(x, y) \mapsto [x, y]$, so dass gilt:

1. $[x, x] = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$.
2. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ für $x, y, z \in \mathfrak{g}$ (Jacobi-Identität).

Die Multiplikation ist i.a. nicht assoziativ. Außerdem ist $[x, y] = -[y, x]$.

Beispiele.

1. Ist G eine Liegruppe, so ist $L(G)$ mit der Lie-Klammer eine Liealgebra:

   Es ist $\mathscr{L}_{[\xi,\xi]} = \mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\xi - \mathscr{L}_\xi \circ \mathscr{L}_\xi = 0$. Die Jacobi-Identität folgt wie beim nächsten Beispiel.

2. Sei $\mathscr{A}$ eine assoziative k-Algebra. Dann definieren wir $[x, y] := xy - yx$. Offensichtlich gilt:

   $$[x, y] \text{ ist bilinear, und } [x, x] = 0.$$

   Außerdem ist

   $$[[x, y], z] = (xy - yx)z - z(xy - yx) = xyz - yxz - zxy + zyx,$$

   also

   $$\begin{aligned} [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] \;&=\; xyz - yxz - zxy + zyx \\ &\quad +yzx - zyx - xyz + xzy \\ &\quad +zxy - xzy - yzx + yxz \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Die Matrizenalgebra $M_n(\mathbb{R})$ ist ein Spezialfall beider Beispiele. Ein etwas allgemeineres Beispiel ist die Algebra $\mathrm{End}_k(V)$ (mit der Lieklammer $[f, g] = f \circ g - g \circ f$), die zugleich die Liealgebra von $\mathrm{Aut}_k(V)$ ist.

Ist $G = GL_n(k)$ und $i_A : G \to G$ der innere Automorphismus $X \mapsto AXA^{-1}$, so ist

$$(i_A)'(\alpha_X'(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (A \cdot \alpha_X(t) \cdot A^{-1}) = A \cdot \alpha_X'(0) \cdot A^{-1}\,.$$

Die Zuordnung $G \to \mathrm{Aut}(L(G))$ mit $A \mapsto (i_A)'$ ist die schon bekannte adjungierte Darstellung Ad.

Genauso ist die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad} : \mathrm{Aut}_k(V) \to \mathrm{Aut}_k(\mathrm{End}_k(V))$ gegeben durch $\mathrm{Ad}(f)(g) = f \circ g \circ f^{-1}$.

Definition.
Eine *Darstellung* einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ (über k) ist ein Homomorphismus $\gamma : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(S)$ (von Liealgebren).

Die Definition lautet genauso wie bei den assoziativen Algebren, aber hier geht es um einen Homomorphismus bezüglich der Lieklammer:

$$\gamma([x,y]) = [\gamma(x),\gamma(y)].$$

1.17 Satz. *Sei $\varrho : G \to H$ ein Liegruppen-Homomorphismus. Dann ist $\varrho' : L(G) \to L(H)$ ein Homomorphismus von Liealgebren.*

BEWEIS: Ist $v \in L(G)$ und $\xi = \xi_v$ das zugehörige links-invariante Vektorfeld, so bezeichnen wir die Lie-Ableitung $\mathscr{L}_\xi$ auch mit $\mathscr{L}_v$. Ist $\alpha : \mathbb{R} \to G$ eine Integralkurve mit $\alpha(0) = e$ und $\alpha'(0) = v$, so ist $\mathscr{L}_v f(g) = (f \circ L_g \circ \alpha)'(0)$.

Dann ist aber auch $\varrho \circ \alpha(0) = e$ und $(\varrho \circ \alpha)'(0) = \varrho'(v)$. Außerdem ist $L_{\varrho(g)} \circ \varrho(x) = \varrho(g)\varrho(x) = \varrho(gx) = \varrho \circ L_g(x)$, also

$$\mathscr{L}_{\varrho' v} h(\varrho(g)) = (h \circ L_{\varrho(g)} \circ \varrho \circ \alpha)'(0) = (h \circ \varrho \circ L_g \circ \alpha)'(0) = \mathscr{L}_v(h \circ \varrho)(g).$$

Daraus folgt:

$$(\mathscr{L}_{\varrho' v}\mathscr{L}_{\varrho' w}(h)) \circ \varrho = \mathscr{L}_v((\mathscr{L}_{\varrho' w} h) \circ \varrho) = \mathscr{L}_v(\mathscr{L}_w(h \circ \varrho))$$

und schließlich $(\mathscr{L}_{[\varrho' v, \varrho' w]} h) \circ \varrho = \mathscr{L}_{[v,w]}(h \circ \varrho) = (\mathscr{L}_{\varrho'[v,w]} h) \circ \varrho$.

Da $v = \alpha'(0)$ durch die Werte $(\mathscr{L}_v f)(e) = (f \circ \alpha)'(0)$ festgelegt ist, folgt die Behauptung. ∎

1.18 Folgerung. *Ist $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_\mathbb{R}(V)$ ein Homomorphismus von Liegruppen, so ist $\varrho' : L(G) \to \mathrm{End}_\mathbb{R}(V)$ eine Darstellung der Liealgebra $L(G)$.*

Als Spezialfall wollen wir die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}_\mathbb{R}(L(G))$ betrachten, mit $\mathrm{Ad}(g) = (i_g)'$. Allerdings betrachten wir nur den Fall $G = \mathrm{Aut}_\mathbb{R}(V)$., mit $L(G) = \mathrm{End}_\mathbb{R}(V)$. Die abgeleitete Darstellung

$$\mathrm{ad} := \mathrm{Ad}' : L(G) = \mathrm{End}_\mathbb{R}(V) \to \mathrm{End}_\mathbb{R}(L(G))$$

wird wieder *adjungierte Darstellung* genannt. Zu ihrer Berechnung eine Bemerkung über Ableitungen in $\mathrm{End}_\mathbb{R}(V)$:

Die Abbildung $j : \mathrm{Aut}_k(V) \to \mathrm{Aut}_k(V)$ mit $j(f) := f^{-1}$ hat als Ableitung in einem Punkt f die lineare Abbildung $Dj(f) \in \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathrm{End}_k(V), \mathrm{End}_k(V))$ mit

$$Dj(f)(g) = -f^{-1} \circ g \circ f^{-1}$$

(entsprechend der Differentiations-Regel $(x^{-1})' = -x^{-2}$). Ist jetzt $\alpha : I \to \mathrm{Aut}_k(V)$ ein differenzierbarer Weg mit $\alpha(0) = \mathrm{id}_V$ und $\alpha'(0) = g \in \mathrm{End}_k(V)$, so ist auch $j \circ \alpha : I \to \mathrm{Aut}_k(V)$ ein differenzierbarer Weg, mit $j \circ \alpha(0) = \mathrm{id}_V$ und $(j \circ \alpha)'(0) = Dj(\alpha(0))(\alpha'(0)) = Dj(\mathrm{id}_V)(g) = -g$.

Es ist

$$\operatorname{Ad} \circ \alpha(t)(h) = \alpha(t) \circ h \circ \alpha(t)^{-1}$$

und daher

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(g)(h) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \operatorname{Ad} \circ \alpha(t)(h) \\ &= \alpha'(0) \circ h \circ \alpha(0)^{-1} + \alpha(0) \circ h \circ (j \circ \alpha)'(0) \\ &= g \circ h - h \circ g \;=\; [g, h]. \end{aligned}$$

Die Aussage gilt auch für beliebige Liegruppen, dann wird der Beweis allerdings komplizierter.

Jetzt betrachten wir noch einmal die Gruppe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ist $A \in L(G) = M_n(\mathbb{R})$, so ist

$$\alpha_A(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$$

eine differenzierbare Kurve in G, mit $\alpha_A(0) = E$ und $\alpha'_A(t) = A \cdot \alpha_A(t)$. Außerdem ist $\alpha_A(s) \cdot \alpha_A(t) = \alpha_A(s+t)$, also $t \mapsto \alpha_A(t)$ die (eindeutig bestimmte) Ein-Parameter-Gruppe zu A in G. Damit ist $A \mapsto \alpha_A(1) = \exp(A)$ die Exponentialabbildung der Liegruppe G, also

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n .$$

Für alle $X \in G$ können wir den Tangentialraum $T_X(G)$ mit $M_n(\mathbb{R})$ identifizieren. Ist $A = \alpha'_A(0) \in T_E(G)$ und $X \in G$, so ist

$$(L_X)_* A = (L_X \circ \alpha_A)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 X \cdot \alpha_A(t) = X \cdot \alpha'_A(0) = X \cdot A.$$

Für das links-invariante Vektorfeld ξ_A gilt dann:

$$(\xi_A)_X = (L_X)_* A = X \cdot A.$$

Der globale Fluss Φ_A von ξ_A ist gegeben durch

$$\Phi_A(t, X) = X \cdot \exp(tA).$$

1.19 Satz. *Sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Liegruppen. Dann ist auch* $\operatorname{Ker}(\varphi)$ *eine Liegruppe, und* $L(\operatorname{Ker}(\varphi)) = \operatorname{Ker}(\varphi')$.

Sind $H_1, H_2 \subset G$ zwei abgeschlossene Lie-Untergruppen, so ist auch $H_1 \cap H_2$ eine Liegruppe, mit $L(H_1 \cap H_2) = L(H_1) \cap L(H_2)$.

BEWEIS: a) $\operatorname{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(e_H)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von G und damit eine Liegruppe. Ist $v \in L(\operatorname{Ker}(\varphi))$, so gibt es eine Kurve $\alpha : I \to \operatorname{Ker}(\varphi)$ mit

$\alpha(0) = e$ und $\alpha'(0) = v$. Weil $\varphi \circ \alpha(t) \equiv e_H$ ist, ist $\varphi'(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0) = 0$, also $v \in \mathrm{Ker}(\varphi')$.

Sei nun umgekehrt $v \in \mathrm{Ker}(\varphi') \subset L(G)$ gegeben. Dann ist

$$e = \exp(0) = \exp(\varphi'(tv)) = \varphi(\exp(tv)),$$

d.h., $\alpha_v(t) = \exp(tv)$ verläuft ganz in $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Das bedeutet, dass $v = \alpha_v'(0)$ in $L(\mathrm{Ker}(\varphi))$ liegt.

b) Als abgeschlossene Untergruppe ist $H_1 \cap H_2$ eine Liegruppe. Es ist klar, dass $L(H_1 \cap H_2) \subset L(H_1) \cap L(H_2)$ ist. Sei nun umgekehrt $v \in L(H_1) \cap L(H_2)$. Dann verläuft $\alpha_v(t) = \exp(tv)$ in $H_1 \cap H_2$ und wie oben folgt, dass $v \in L(H_1 \cap H_2)$ ist. ∎

Beispiele.

1. Die Determinante $\det : \mathrm{GL}_n(k) \to k^\times$ stellt einen Homomorphismus von Liegruppen dar. Also ist die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{SL}_n(k) := \mathrm{Ker}(\det) = \{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,:\, \det(X) = 1\}$$

eine Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$.

Aus Analysis III ist folgende Gleichung bekannt: $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Spur}(A)}$. Damit ist

$$\mathfrak{sl}_n(k) := L(\mathrm{SL}_n(k)) = \mathrm{Ker}(\det{}') = \{A \in M_n(k) \,:\, \mathrm{Spur}(A) = 0\},$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \det{}'(X) &= (\det \circ \alpha_X)'(0) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \det(\exp(tX)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 e^{\mathrm{Spur}(tX)} = \mathrm{Spur}(X). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\dim(\mathrm{SL}_n(k)) = n^2 - 1$.

2. Sei $\alpha(t) := \exp(tA)$, für ein $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dann ist $\alpha(0) = E$ und $\alpha'(0) = A$. Verläuft α ganz in $O(n)$ (und damit sogar in $SO(n)$), so ist $\alpha(t) \cdot \alpha(t)^\top = E$, also

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_0 \alpha(t) \cdot \alpha(t)^\top = \alpha'(0) + \alpha'(0)^\top = A + A^\top.$$

Ist umgekehrt $A + A^\top = 0$, so ist $A^\top = -A$, also $A \cdot A^\top = A^\top \cdot A$. Daraus folgt:

$$\exp(tA) \cdot \exp(tA)^\top = \exp(tA) \cdot \exp(tA^\top) = \exp(t(A + A^\top)) = \exp(0) = E,$$

also $\alpha(t) := \exp(tA) \in O(n)$ für alle t. Dann ist $A = \alpha'(0) \in L(O(n)) = L(SO(n))$. Wir haben damit gezeigt:

$$\mathfrak{so}_n := L(SO(n)) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, A + A^\top = 0\}.$$

Die Liealgebra der $SO(n)$ ist also der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen. Da $SO(n)$ die Zusammenhangskomponente der 1 in $O(n)$ ist, unterscheiden sich die Liealgebren von $O(n)$ und $SO(n)$ nicht.

3. Die unitäre Gruppe $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \,:\, A \cdot \overline{A}^\top = E\}$ ist zusammenhängend, und wie oben zeigt man:

$$\mathfrak{u}_n := L(U(n)) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \,:\, A^\top = -\overline{A}\}.$$

Das ist die Algebra der „schief-hermiteschen Matrizen“.

Die Liealgebra von $SU(n) = U(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}_n &:= L(SU(n)) = L(U(n)) \cap L(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) \\ &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \,:\, A^\top = -\overline{A} \text{ und } \mathrm{Spur}(A) = 0\}. \end{aligned}$$

4. Die *symplektische Gruppe* ist definiert durch

$$Sp(n) := \{A \in M_n(\mathbb{H}) \,:\, A \cdot \overline{A}^\top = E_n\}.$$

Man kann diese Gruppe auch mit komplexen Matrizen beschreiben. Dazu sei $\psi : M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$ definiert durch

$$\psi(A + B\mathsf{j}\,) := \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass ψ ein injektiver Algebra-Homomorphismus ist, wenn man berücksichtigt, dass $X\mathsf{j} = \mathsf{j}\,\overline{X}$ ist, für $X \in M_n(\mathbb{C})$. Außerdem gilt:

$$\psi(\overline{X}^\top) = \overline{\psi(X)}^\top.$$

BEWEIS dafür:

Sei $X = A + B\mathsf{j} \in M_n(\mathbb{H})$. Dann ist $\overline{X}^\top = \overline{A}^\top + \overline{B\mathsf{j}}^\top = \overline{A}^\top - \mathsf{j}\overline{B}^\top = \overline{A}^\top - B^\top\mathsf{j}$, also $\overline{\psi(X)}^\top = \begin{pmatrix} \overline{A}^\top & -B^\top \\ \overline{B}^\top & A^\top \end{pmatrix} = \psi(\overline{X}^\top)$.

Wir wollen nun das Bild von $Sp(n)$ unter ψ beschreiben. Dazu sei $F_n := \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$.

Behauptung: $\psi(Sp(n)) = \{X \in U(2n) \,:\, X \cdot F_n \cdot X^\top = F_n\}$.

BEWEIS: Offensichtlich ist $\psi(Sp(n)) \subset U(2n)$. Und für $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(2n)$ gilt: $X^{-1} = \overline{X}^\top$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} X \cdot F_n \cdot X^\top = F_n \quad &\iff \quad F_n \cdot X^\top = \overline{X}^\top \cdot F_n \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot F_n^\top = F_n^\top \cdot \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{C} & -\overline{D} \\ \overline{A} & \overline{B} \end{pmatrix} \\ &\iff \quad C = -\overline{B} \text{ und } D = \overline{A} \\ &\iff \quad X \in \psi(Sp(n)). \end{aligned}$$

Jetzt sieht man, dass gilt:

$$\mathfrak{sp}_n := L(Sp(n)) = \{A \in L(U(2n)) \,:\, A \cdot F_n + F_n \cdot A^\top = 0\}.$$

Unter den „klassischen Gruppen“ versteht man die Gruppen $\mathrm{GL}_n(k)$, $\mathrm{SL}_n(k)$, $O(n,k) := \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \,:\, A \cdot A^\top = E_n\}$, $SO(n,k) := O(n,k) \cap \mathrm{SL}_n(k)$, $U(n)$, $SU(n)$ und $Sp(n)$, sowie noch ein paar weitere Matrizen-Gruppen, die wir hier nicht betrachtet haben.

Wir betrachten noch einige nieder-dimensionale Fälle:

- Es ist $O(1) = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2$ und $SO(1) = \{1\}$.
- $SO(2) = \{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\} \cong S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ ist die Gruppe der ebenen Drehungen.
- $SO(3) \cong S^3/\mathbb{Z}_2$ ist die Gruppe der räumlichen Drehungen.
- Es ist $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z\overline{z} = 1\} \cong SO(2)$, $SU(1) = \{1\}$.
- Es ist $SU(2) = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \,:\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} \cong S^3$, also $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$.
- Es ist $Sp(1) \cong SU(2) \cong S^3$.
- Ein nicht-kompaktes Beispiel ist $\mathscr{L}_+^\uparrow = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.