§ 5 Spinoren und Clifford-Gruppen

Es seien $k \subset K$ zwei Körper. Die folgenden Betrachtungen lassen sich weitgehend für beliebige Körper durchführen, lediglich Charakteristik 2 muss besonders behandelt werden. Außerdem sollte in gewissen Situationen der Oberkörper K algebraisch abgeschlossen sein. Der Einfachheit halber beschränken wir uns aber weiterhin auf den Fall $k, K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition.

Sei $\mathscr{A}$ eine assoziative k-Algebra mit 1. Eine *Darstellung* von $\mathscr{A}$ auf einem (endlich-dimensionalen) K-Vektorraum S ist ein k-Algebra-Homomorphismus $\gamma : \mathscr{A} \to \operatorname{End}_K(S)$. Die Darstellung heißt *treu*, falls γ injektiv ist.

Für $a \in \mathscr{A}$ ist also $\gamma_a := \gamma(a) : S \to S$ eine K-lineare Abbildung. Statt $\gamma_a(x)$ schreibt man auch $a \cdot x$. Es ist $\gamma_{a+b} = \gamma_a + \gamma_b$ und $\gamma_{ra} = r \cdot \gamma_a$ für $r \in k$. Der Endomorphismus γ_0 ist die Null-Abbildung. Außerdem gilt:

1. $\gamma_1 = \mathrm{id}_S$ (d.h. $1 \cdot x = x$).

2. $\gamma_{ab} = \gamma_a \circ \gamma_b$ (d.h. $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$).

Die Darstellung γ ist genau dann treu, wenn aus $\gamma_a = \mathrm{id}_S$ folgt, dass $a = 1$ ist. Man kann dann $\mathscr{A}$ als Unter-Algebra von $\operatorname{End}_K(S)$ auffassen.

Versieht man S mit einer Basis $\{w_1, \ldots, w_q\}$, so kann man $\operatorname{End}_K(S)$ mit der Matrizen-Algebra $M_q(K)$ identifizieren. Für $a \in \mathscr{A}$ ist

$$\gamma_a(w_\nu) = \sum_{\mu=1}^{q} \gamma_\nu^\mu(a) w_\mu,$$

mit gewissen Elementen $\gamma_\nu^\mu(a) \in K$. Ist die Darstellung treu, so kann man $a \in \mathscr{A}$ mit der Matrix $\gamma(a) = (\gamma_\nu^\mu(a) \,|\, \nu, \mu = 1, \ldots, q)$ identifizieren. Ist $x = \sum_{\nu=1}^{q} x^\nu w_\nu \in S$, so ist

$$\gamma_a(x) = \sum_{\nu,\mu} \gamma_\nu^\mu(a) x^\nu w_\mu.$$

In Physikbüchern werden die Basiselemente und die Summenzeichen weggelassen. Das sieht dann folgendermaßen aus:

$$\gamma_a : \; x^\nu \;\to\; \gamma_\nu^\mu(a) x^\nu.$$

Man kann sich dann aussuchen, ob man die Vektoren als Zeilen oder Spalten schreiben möchte. Bei der Spaltenschreibweise ist der obere Index (μ) bei γ_ν^μ der Zeilen-Index; bei der Zeilenschreibweise ist es der Spalten-Index.

Beispiel.

Die Dirac-Matrizen liefern treue Darstellungen von Clifford-Algebren. Im Falle der Γ_i hatten wir $C(\mathbb{R}^4, q_{1,3})$ mit $\mathscr{H} \otimes M_2(\mathbb{R})$ identifiziert, einer $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $M_4(\mathbb{C})$. Die Majorana-Darstellung identifizierte dagegen $C(\mathbb{R}^4, q_{3,1})$ mit $M_4(\mathbb{R})$. Die Original-Dirac-Matrizen liefern eine Darstellung der komplexen Clifford-Algebra C_4^c auf dem $\mathbb{C}^4$.

Definition.

Zwei Darstellungen $\gamma_i : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_K(S_i)$, $i = 1, 2$, heißen *äquivalent*, falls es einen k-Isomorphismus $f : S_1 \to S_2$ gibt, so dass für alle $a \in \mathscr{A}$ gilt:

$$f \circ \gamma_1(a) = \gamma_2(a) \circ f.$$

Das bedeutet, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} & S_1 & \xrightarrow{\gamma_1(a)} & S_1 & \\ f & \downarrow & & \downarrow & f \\ & S_2 & \xrightarrow{\gamma_2(a)} & S_2 & \end{array}$$

In Matrizenschreibweise sieht das folgendermaßen aus: Wird $\gamma_1(a)$ durch eine Matrix $\gamma = (\gamma_\nu^\mu)$ und $\gamma_2(a)$ durch eine Matrix $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_\kappa^\lambda)$ beschrieben, sowie f durch $A = (a_\lambda^\kappa) \in \mathrm{GL}_q(K)$, so ist $A \cdot \gamma = \widetilde{\gamma} \cdot A$, also

$$\sum_\nu a_\lambda^\nu \gamma_\nu^\mu = \sum_\nu \widetilde{\gamma}_\lambda^\nu a_\nu^\mu \text{ für jedes Indexpaar } (\lambda, \mu).$$

Definition.

Sei $\gamma : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_K(S)$ eine Darstellung. Ein Unterraum $T \subset S$ heißt *invariant*, falls $\gamma_a(T) \subset T$ für alle $a \in \mathscr{A}$ gilt. In diesem Fall wird die Darstellung $\gamma^T : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_K(T)$ definiert durch

$$\gamma_a^T := \gamma_a|_T.$$

Die Darstellung γ heißt *irreduzibel* oder *einfach*, falls gilt:

1. $S \neq \{0\}$.
2. $\{0\}$ und S sind die einzigen invarianten Unterräume von S.

Die Darstellung heißt *reduzibel*, falls sie nicht irreduzibel ist.

Beispiel.

Zu jeder assoziativen k-Algebra $\mathscr{A}$ mit 1 gibt es die *links-reguläre Darstellung*

$$\lambda : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(\mathscr{A}), \quad \text{mit } \lambda_a(b) := ab.$$

Diese Darstellung ist treu. Ist nämlich $ab = b$ für alle $b \in \mathscr{A}$, so ist insbesondere $a = a \cdot 1 = 1$.

Ist $\mathscr{T} \subset \mathscr{A}$ ein invarianter Unterraum, so ist $ab \in \mathscr{T}$ für alle $a \in \mathscr{A}$, $b \in \mathscr{T}$. Das bedeutet, dass $\mathscr{T}$ ein Links-Ideal in $\mathscr{A}$ ist. Umgekehrt ist natürlich auch jedes Links-Ideal ein invarianter Unterraum unter der links-regulären Darstellung.

Die Einschränkung $\lambda^{\mathscr{T}} : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(\mathscr{T})$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\mathscr{T}$ ein *minimales* Links-Ideal ist.

Sei etwa $\mathscr{A} = M_n(k)$. Die links-reguläre Darstellung ist gegeben durch die Matrizen-Multiplikation von links. Dann ist $S = \{X = (x_{ij}) \in M_n(k) : x_{ij} = 0 \text{ für } j > 1\} \cong k^n$ ein Links-Ideal, also ein invarianter Unterraum. Die eingeschränkte Darstellung λ^S ist die bekannte Multiplikation von Matrizen und Spaltenvektoren. Ist $X_0 \in S$ ein festes Element $\neq 0$, so erhält man durch Multiplikation mit geeigneten Matrizen jedes andere Element von S. Also sind $\{0\}$ und S die einzigen invarianten Unterräume, d.h., λ^S ist irreduzibel und S ein minimales Links-Ideal.

Definition.
Es seien zwei Darstellungen $\gamma_i : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_K(S_i)$ gegeben. Unter einem $\mathscr{A}$-Morphismus von S_1 nach S_2 versteht man eine k-lineare Abbildung $f : S_1 \to S_2$, so dass gilt:

$$f \circ \gamma_1(a) = \gamma_2(a) \circ f \text{ für alle } a \in \mathscr{A}.$$

Offensichtlich liefert ein $\mathscr{A}$-Isomorphismus eine Äquivalenz der Darstellung. Ein allgemeiner $\mathscr{A}$-Morphismus braucht jedoch nicht bijektiv zu sein.

5.1 Satz. *Ist f ein $\mathscr{A}$-Morphismus, so sind die Unterräume* $\mathrm{Ker}(f) \subset S_1$ *und* $\mathrm{Im}(f) \subset S_2$ *invariant.*

Beweis: a) Ist $x \in \mathrm{Ker}(f)$, so ist $f(\gamma_1(a)(x)) = \gamma_2(a)(f(x)) = 0$, also auch $\gamma_1(a)(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.

b) Ist $y = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, so ist $\gamma_2(a)(y) = \gamma_2(a) \circ f(x) = f \circ \gamma_1(a)(x)$, also $\gamma_2(a)(y) \in \mathrm{Im}(f)$. ∎

5.2 Schur'sches Lemma. *Gegeben seien zwei Darstellungen $\gamma_i : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_K(S_i)$ und ein $\mathscr{A}$-Morphismus $f : S_1 \to S_2$, $f \neq 0$. Dann gilt:*

1. *Ist γ_1 irreduzibel, so ist f injektiv.*
2. *Ist γ_2 irreduzibel, so ist f surjektiv.*
3. *Sind γ_1 und γ_2 beide irreduzibel, so ist f ein Isomorphismus. Ist sogar $S_1 = S_2 =: S$ und $K = \mathbb{C}$, so gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, so dass $f = c \cdot \mathrm{id}_S$ ist.*

Beweis: 1) Ist γ_1 irreduzibel und $f \neq 0$, so muss $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ sein, also f injektiv.

2) Ist γ_2 irreduzibel und $f \neq 0$, so muss $\mathrm{Im}(f) = T$ sein, also f surjektiv.

3) Ist $S = S_1 = S_2$, $\gamma := \gamma_1 = \gamma_2$ und $k = \mathbb{C}$, so ist f ein Isomorphismus und besitzt einen Eigenwert c. Sei $E := \{x \in S \,:\, f(x) = c \cdot x\}$ der Eigenraum zu c. Für $x \in E$ und $a \in \mathscr{A}$ ist

$$f(\gamma(a)x) = \gamma(a)(f(x)) = \gamma(a)(c \cdot x) = c \cdot (\gamma(a)x),$$

also auch $\gamma(a)x \in E$. Damit ist E invariant und enthält einen Eigenvektor $x \neq 0$. Das ist nur möglich, wenn $E = S$ ist, also $f = c \cdot \mathrm{id}_S$. ∎

Bemerkung. Sei $\mathscr{A}$ eine k-Algebra und $\gamma : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(S)$ eine irreduzible Darstellung. Dann ist $\mathscr{C} := \{f \in \mathrm{End}_k(S) \,:\, f \circ \gamma(a) = \gamma(a) \circ f \text{ für alle } a \in \mathscr{A}\}$ eine Unteralgebra von $\mathrm{End}_k(S)$. Die Elemente von $\mathscr{C}$ sind also die $\mathscr{A}$-Morphismen von S auf sich. Nach dem Schur'schen Lemma muss jedes solche $f \neq 0$ ein Isomorphismus sein. Das bedeutet, dass alle $f \neq 0$ in $\mathscr{C}$ invertierbar sind.

Definition.
Eine $\mathbb{R}$-Algebra $\mathscr{A} \neq 0$ heißt *Divisionsalgebra*, falls für alle $a, b \in \mathscr{A}$ mit $a \neq 0$ die Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ eindeutig lsbar sind.

Die oben eingeführte Algebra $\mathscr{C}$ ist offensichtlich im Falle $k = \mathbb{R}$ eine Divisionsalgebra. Nach einem Satz von Frobenius (1877) ist jede endlich-dimensionale assoziative Divisionsalgebra isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$.

Definition.
Eine (assoziative) k-Algebra $\mathscr{A}$ heißt *einfach*, falls $\mathscr{A}$ und $\{0\}$ die einzigen zweiseitigen Ideale in $\mathscr{A}$ sind.

5.3 Satz. *Jede (reelle) Divisionsalgebra $\mathscr{A}$ ist einfach.*

BEWEIS: Sei $\lambda : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathscr{A})$ die linksreguläre Darstellung. Ist $\mathscr{T} \subset \mathscr{A}$ ein zweiseitiges Ideal $\neq 0$ und $a \neq 0$ ein Element von $\mathscr{T}$, so gehört $1 = a^{-1}a$ zu $\mathscr{T}$, und es ist $\mathscr{T} = \mathscr{A}$. ∎

Darüber hinaus gilt:

5.4 Satz. *Sei $\mathscr{A}$ eine einfache assoziative endlich-dimensionale k-Algebra mit 1, $S \subset \mathscr{A}$ ein minimales Linksideal $\neq 0$. Dann ist die links-reguläre Darstellung $\lambda : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(S)$ treu und irreduzibel, und jede andere treue irreduzible Darstellung von $\mathscr{A}$ ist dazu äquivalent.*

BEWEIS: Wir haben oben schon gezeigt, dass die linksreguläre Darstellung treu ist. Und es ist klar, dass die Einschränkung λ^S auf ein minimales Linksideal S eine irreduzible Darstellung ist.

Sei nun $\gamma : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(V)$ irgend eine treue irreduzible Darstellung. Dann gibt es ein $x_0 \in V$ und ein $b_0 \in S$ mit $\gamma(b_0)x_0 \neq 0$. Andernfalls wäre nämlich $\gamma_b = \gamma_0$ für alle $b \in S$, im Widerspruch zur Injektivität von γ. Sei nun $f : S \to V$ definiert durch $f(b) := \gamma_b(x_0)$. Das ist eine k-lineare Abbildung, mit

$$f(\lambda_a(b)) = f(ab) = \gamma_{ab}(x_0) = \gamma_a \circ \gamma_b(x_0) = \gamma_a(f(b)),$$

also ein $\mathscr{A}$-Morphismus. Weil beide Darstellungen irreduzibel sind und $f \neq 0$ ist, folgt aus dem Schur'schen Lemma, dass f ein Isomorphismus ist. Damit sind die Darstellungen äquivalent. ∎

Definition.
Sind $\gamma_i : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(S_i)$ zwei Darstellungen, so werden die Darstellungen

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(S_1 \oplus S_2) \text{ und } \gamma_1 \otimes \gamma_2 : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(S_1 \otimes S_2)$$

definiert durch

$$(\gamma_1 \oplus \gamma_2)_a(x, y) := ((\gamma_1)_a(x), (\gamma_2)_a(y)) \text{ und } (\gamma_1 \otimes \gamma_2)_a(u \otimes v) := (\gamma_1)_a(u) \otimes (\gamma_2)_a(v).$$

Ist z.B. $\gamma : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(S)$ eine Darstellung und $S = S_1 \oplus S_2$ eine Zerlegung in invariante Unterräume, so ist γ äquivalent zu $\gamma^{S_1} \oplus \gamma^{S_2}$. Analog geht es bei mehreren Summanden.

Sei weiterhin $\mathscr{A}$ eine endlich-dimensionale assoziative k-Algebra mit 1, $S \neq 0$ endlich-dimensional.

5.5 Satz. *Eine Darstellung $\gamma : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(S)$ ist genau dann irreduzibel, wenn für alle $x \neq 0$ in S gilt: $S = \mathscr{A} \cdot x$.*

BEWEIS: Sei S irreduzibel und $x \in S$, $x \neq 0$. Dann ist $\mathscr{A} \cdot x \subset S$ ein invarianter Unterraum, und $\mathscr{A} \cdot x \neq \{0\}$ (weil 1 in $\mathscr{A}$ liegt). Also muss $\mathscr{A} \cdot x = S$ sein.

Sei nun umgekehrt das Kriterium erfüllt und $T \subset S$ ein invarianter Unterraum. Ist $T \neq \{0\}$, so gibt es ein Element $x \neq 0$ in T. Dann ist aber $S = \mathscr{A} \cdot x \subset T$, also $S = T$. ∎

Definition.
Eine Darstellung $\gamma : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(S)$ heißt *vollständig reduzibel*, falls es invariante Unterräume $S_1, \ldots, S_q \subset S$ gibt, so dass gilt:

1. Alle Teildarstellungen γ^{S_i} sind irreduzibel.
2. Es ist $\gamma = \gamma^{S_1} \oplus \ldots \oplus \gamma^{S_q}$.

5.6 Lemma. *Ist S Summe von endlich vielen irreduziblen Unterräumen, so gilt:*

1. *Zu jedem invarianten Unterraum $T \subset S$ mit $T \neq 0$ und $T \neq S$ gibt es einen weiteren invarianten Unterraum $T' \subset S$, so dass $S = T \oplus T'$ ist.*
2. *S ist vollständig reduzibel.*

Beweis: 1) Sei S Summe von endlich vielen irreduziblen Unterräumen $P_1, \ldots, P_m$, $T \subset S$ ein invarianter Unterraum, $T \neq 0$ und $T \neq S$. Dann gibt es ein i mit $P_i \not\subset T$. Weil P_i irreduzibel ist, muss $P_i \cap T = \{0\}$ sein. Dann ist aber $P_i + T = P_i \oplus T$. Ist $P_i + T \neq S$, so wiederholt man die Argumentation. Nach endlich vielen Schritten erhält man einen invarianten Unterraum $T' \subset S$, so dass $S = T \oplus T'$ ist.

2) Ist S selbst schon irreduzibel, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gibt es einen invarianten Unterraum $T \subset S$ mit $T \neq 0$ und $T \neq S$. Nach der obigen Überlegung findet man einen weiteren invarianten Unterraum $T' \subset S$ mit $S = T \oplus T'$. Die Unterräume T und T' versucht man nun weiter zu zerlegen. Bei jedem Schritt sinkt die Dimension, und da jeder invariante Unterraum einen irreduziblen Unterraum enthält, bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab. ∎

5.7 Satz. *Ist die Algebra einfach, so ist die linksreguläre Darstellung $\lambda : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(\mathscr{A})$ vollständig reduzibel.*

Beweis: Sei $\mathscr{T} \subset \mathscr{A}$ die Summe aller minimalen Links-Ideale. Dann ist $\mathscr{T}$ selbst wieder ein Links-Ideal. Ist $a \in \mathscr{A}$ und I ein minimales Links-Ideal, so ist auch $I \cdot a$ ein Links-Ideal und wieder minimal. Also liegt $I \cdot a$ in $\mathscr{T}$. Daraus folgt, dass $\mathscr{T}$ auch ein Rechts-Ideal, also sogar ein zweiseitiges Ideal. Weil $\mathscr{A}$ einfach ist, ist $\mathscr{T} = \mathscr{A}$. Weil $\mathscr{A}$ endlich-dimensional ist, ist $\mathscr{A}$ schon Summe von endlich vielen minimalen Links-Idealen. Aus dem Lemma folgt die Behauptung. ∎

5.8 Satz. *Ist $\mathscr{A}$ einfach, so ist jede endlich-dimensionale Darstellung von $\mathscr{A}$ vollständig reduzibel.*

Beweis: Sei $\mathscr{A} = \mathscr{T}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{T}_q$ eine Zerlegung in minimale Links-Ideale, sowie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine k-Basis des $\mathscr{A}$-Moduls S. Dann ist $S_{ij} := \mathscr{T}_i \cdot a_j$ ein invarianter

Unterraum. Sei $M \subset S_{ij}$ ein invarianter Unterraum und $\neq 0$, $\mathscr{P} = \{t \in \mathscr{T}_i : ta_j \in M\}$. Dann ist $\mathscr{P} \subset \mathscr{T}_i$ ein minimales Linksideal und $\neq 0$, also $\mathscr{P} = \mathscr{T}_i$ und $M = S_{ij}$. Das bedeutet, dass S_{ij} irreduzibel ist. Also ist S vollständig reduzibel. ∎

Ein $\mathscr{A}$-Links-Modul heißt *einfach*, falls er keine echten Untermoduln $\neq 0$ besitzt. Der Modul heißt *halbeinfach*, falls er direkte Summe von einfachen Untermoduln ist. Wir haben gezeigt, dass jeder endlich-dimensionale Darstellungsraum S von $\mathscr{A}$ ein halbeinfacher $\mathscr{A}$-Modul ist.

Eine k-Algebra $\mathscr{A}$ heißt *zentral*, falls das Zentrum $Z(\mathscr{A}) = \{z \in \mathscr{A} : zx = xz \text{ für alle } x \in \mathscr{A}\}$ genau aus den Elementen $c \cdot 1_{\mathscr{A}}$, $c \in k$, besteht.

5.9 Satz. *Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ und $k \subset K$. Dann ist $M_n(K)$ eine einfache und im Falle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{H}$ auch zentrale $\mathbb{R}$-Algebra. Weiter ist $Z(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C} \cdot E_n$.*

BEWEIS: Ist $A \in M_n(K)$ und $X \cdot A = A \cdot X$ für alle X, so sieht man durch Einsetzen der Elementarmatrizen E_{ij} sofort, dass $A = \alpha \cdot E_n$ ist, für ein $\alpha \in K$. Offensichtlich liegt A genau dann im Zentrum, wenn $\alpha \in Z(K)$ liegt.

Sei nun $I \subset M_n(K)$ ein Ideal $\neq 0$. Dann gibt es eine Matrix $A = (a_{ij}) \in I$ mit $A \neq 0$. Sei etwa $a_{kl} \neq 0$. Nun kann man Permutationsmatrizen P und Q finden, so dass $(PAQ)_{ii} = a_{kl}$ ist. Aber dann ist $a_{kl} \cdot E_{ii} = E_{ii}PAQE_{ii} \in I$. Weil $a_{kl} \neq 0$ ist, liegt $a_{kl}^{-1} \cdot E_n$ in $M_n(K)$ und $E_{ii} = (a_{kl}^{-1} \cdot E_n) \cdot (a_{kl} \cdot E_{ii}) \in I$. Damit liegt auch $E_n \in I$, und es ist $I = M_n(K)$. ∎

Sei nun V ein n-dimensionaler k-Vektorraum, q eine reguläre quadratische Form auf V und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine ON-Basis. Außerdem sei $C = C(V, q)$ die zugehörige Clifford-Algebra.

5.10 Satz. *Ist n gerade, so ist C zentral, also $Z(C) = k \cdot 1$. Ist n ungerade, so ist $Z(C) = k \cdot 1 + k \cdot e_1 \cdots e_n$.*

BEWEIS: Zunächst einige Vorbemerkungen. Für $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ sei $e_I := e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ (mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$) und $|I| = r$. Dann gilt:

Ist $j \in I$, so ist $e_j \cdot e_I = (-1)^{r-1} e_I \cdot e_j$.
Ist $j \notin I$, so ist $e_j \cdot e_I = (-1)^r e_I \cdot e_j$.

Sei nun $z = \sum_J a_J e_J \in Z(C)$.

a) Sei n gerade, $1 \leq r \leq n$ und $|I| = r$. Ist r gerade und $j \in I$, so ist

$$e_j e_I e_j^{-1} = (-1)^{r-1} e_I e_j e_j^{-1} = -e_I.$$

Weil z im Zentrum liegt, ist $z = e_j z e_j^{-1}$, also

$$a_I e_I + \sum_{J \neq I} a_J e_J = z = \sum_J a_J e_j e_J e_j^{-1} = -a_I e_I + \sum_{J \neq I} a_J e_j e_J e_j^{-1}.$$

Das ist nur möglich, wenn $a_I = 0$ ist.

Ist r ungerade, so ist $r < n$, und es gibt ein $j \notin I$. Genau wie oben folgt aus der Betrachtung von $e_j e_I e_j^{-1}$, dass $a_I = 0$ ist. Da dies für alle $I \neq \varnothing$ gilt, ist $z = a_0 \cdot 1$.

b) Sei nun n ungerade. Ist $1 \leq r \leq n-1$ und $|I| = r$, so folgt wie oben, dass $a_I = 0$ ist. Im Falle $r = n$ lässt sich der Schluss nicht mehr durchführen, denn dann ist $(-1)^{r-1} = +1$. Also ist $z = a_0 \cdot 1 + a_n \cdot e_1 \cdots e_n$.

Ist umgekehrt n ungerade und $z = a_0 \cdot 1 + a_n \cdot e_1 \cdots e_n$, so gilt für alle j :

$$e_j z = a_0 e_j + a_n e_j e_1 \cdots e_n = a_0 e_j + (-1)^{n-1} a_n e_1 \cdots e_n e_j = z e_j.$$

Also liegt z tatsächlich im Zentrum von C. ∎

5.11 Satz. *$\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ seien zwei endlich-dimensionale assoziative k-Algebren. Sind beide Algebren einfach und ist eine von ihnen zentral, so ist auch $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ einfach.*

BEWEIS: Wir können annehmen, dass $\mathscr{A}$ zentral ist.

Sei $I \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ ein (zweiseitiges) Ideal $\neq 0$. Sei $z = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_q \otimes v_q \in I$ ein beliebiges Element $\neq 0$. Wir können annehmen, dass $u_1 \neq 0$ und $v_1 \neq 0$ ist.

Behauptung: I enthält Elemente der Form

$$\text{(a)} \quad 1 \otimes v_1 + u_2' \otimes v_2 + \cdots + u_q' \otimes v_q$$

und

$$\text{(b)} \quad u_1 \otimes 1 + u_2 \otimes v_2' + \cdots + u_q \otimes v_q'.$$

BEWEIS dafür: Da $\mathscr{A}$ einfach ist, stimmt das Ideal $\mathscr{A} \cdot u_1 \cdot \mathscr{A}$ mit $\mathscr{A}$ überein. Also gibt es endlich viele Elemente $x_j, y_j \in \mathscr{A}$, so dass $\sum_j x_j u_1 y_j = 1$ ist. Daraus folgt:

$$\sum_j (x_j \otimes 1) z (y_j \otimes 1) = \sum_{\kappa=1}^{q} \sum_j (x_j u_\kappa y_j) \otimes v_\kappa = 1 \otimes v_1 + \sum_{\kappa=2}^{q} u_\kappa' \otimes v_\kappa,$$

mit $u_\kappa' := \sum_j x_j u_\kappa y_j$.

Bei den Elementen vom Typ (b) argumentiert man genauso.

Wir wählen nun q minimal, so dass es ein Element $z = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_q \otimes v_q \neq 0$ mit in I gibt. Offensichtlich müssen dann $u_1, \ldots, u_q$ und $v_1, \ldots, v_q$ linear unabhängig sein (denn sonst könnte man die Darstellung noch weiter verkürzen).

Annahme: Es ist $q > 1$.

Wegen der oben bewiesenen Zwischen-Behauptung ist auch ein Element

$$z' = 1 \otimes v_1 + u_2' \otimes v_2 + \cdots + u_q' \otimes v_q$$

im Ideal I enthalten (und $\neq 0$). Wäre $u_q' = r \cdot 1$, für ein $r \in k$, so wäre

$$z' = 1 \otimes (v_1 + rv_q) + u'_2 \otimes v_2 + \cdots + u'_{q-1} \otimes v_{q-1}.$$

Wegen der Minimalität von q kann das nicht sein. Weil $\mathscr{A}$ zentral ist, bedeutet das, dass u'_q nicht im Zentrum von $\mathscr{A}$ liegt. Es muss also ein $x \in \mathscr{A}$ mit $u'_q x \neq x u'_q$ geben. Dann folgt:

$$\begin{aligned}(x \otimes 1)w - w(x \otimes 1) &= x \otimes v_1 + xu'_2 \otimes v_2 + \cdots + xu'_q \otimes v_q \\ &\quad -x \otimes v_1 - u'_2 x \otimes v_2 - \cdots - u'_q x \otimes v_q \\ &= (xu'_2 - u'_2 x) \otimes v_2 + \cdots + (xu'_q - u'_q x) \otimes v_q.\end{aligned}$$

Dies widerspricht erneut der Minimalität von q. Also war die Annahme falsch, es muss $q = 1$ sein. Es gibt daher ein Element $z'' = 1 \otimes v_1$ im Ideal I, mit $v_1 \neq 0$.

Da $\mathscr{B}$ einfach ist, gibt es Elemente $\xi_i, \eta_i \in \mathscr{B}$ mit $\sum_i \xi_i v_1 \eta_i = 1$. Dann enthält I auch das Element

$$\sum_i (1 \otimes \xi_i) z'' (1 \otimes \eta_i) = 1 \otimes (\sum_i \xi_i v_1 \eta_i) = 1 \otimes 1.$$

Also ist $I = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. ∎

Beispiel.

Die Algebren $M_2(\mathbb{C}) = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und $M_4(\mathbb{R}) = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ sind einfach, nicht aber die Algebra $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Tatsächlich ist $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Algebra nicht zentral, denn es ist natürlich $Z(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

5.12 Satz. *Sei $C = C(k^n, q_n)$. Ist n gerade, so ist C einfach und zentral. Ist n ungerade, so ist C entweder einfach oder direkte Summe von zwei einfachen und zentralen Algebren.*

BEWEIS: 1) Sei $n = 2r$ gerade, $I \subset C$ ein Ideal $\neq 0$ und $z \in I$ ein Element $\neq 0$. Ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standard-Basis von k^n, so ist $-e_i e_i = -q(e_i) = 1$, also e_i in C invertierbar. Dann ist auch jedes Element $e_J = e_{j_1} \cdots e_{j_p}$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n$ in C invertierbar.

Wir schreiben $z = \sum_J a_J e_J$, mit $a_I \neq 0$. Dann ist auch $z' := a_I^{-1} e_I^{-1} z \in I$, aber $z' = 1 + \sum_{J \neq I} b_J e_J$. Wären hier alle $b_J = 0$, so wäre $1 \in I$, also $I = C$.

Wir nehmen an, es gibt ein J mit $b_J \neq 0$. Dann kann man ein j finden, so dass $e_j e_J = -e_J e_j$ ist. (BEWEIS dafür: Ist $|J| = n = 2r$, so liegt jedes $j \in J$, und es ist $e_j e_J = (-1)^{2r-1} e_J e_j = -e_J e_j$. Ist $|J| = p < n$, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist p gerade, so wähle man ein $j \in J$. Dann ist $e_j e_J = (-1)^{p-1} e_J e_j = -e_J e_j$. Ist p ungerade, so wähle man ein $j \notin J$. Dann ist $e_j e_J = (-1)^p e_J e_j = -e_J e_j$.)

Jetzt ist $e_j e_J e_j^{-1} = -e_J$ und

$$e_j z' e_j^{-1} = 1 - b_J e_J + \sum_{K \neq I,J} b'_K e_K,$$

also

$$z'' := \frac{1}{2}(z' + e_j z' e_j^{-1}) = 1 + \sum_{K \neq I,J} b''_K e_K \in I.$$

Sind hier alle $b'_K = 0$, so folgt, dass $I = C$ ist. Wenn nicht, so wiederholt man die obige Prozedur. Nach endlich vielen Schritten zeigt sich, dass $I = C$ ist.

2) Sei $n = 2r + 1$ ungerade und $C = C^0 \oplus C^1$ die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung von C. Dabei ist C^0 eine Unter-Algebra.

a) Sei $\varphi : k^{2r} \to C^0$ definiert durch $\varphi(y) := e_{2r+1}y$. Außerdem sei die quadratische Form $\widetilde{q}$ auf dem von $e_1, \ldots, e_{2r}$ erzeugten Raum k^{2r} definiert durch $\widetilde{q}(y) := -q_n(e_{2r+1}) \cdot q_n(y)$. Dann ist $\varphi(y)^2 = (e_{2r+1}y) \cdot (e_{2r+1}y) = -q_n(y)q_n(e_{2r+1}) = \widetilde{q}(y)$, und es gibt einen Algebra-Homomorphismus $\widehat{\varphi} : C(k^{2r}, \widetilde{q}) \to C^0$, der φ fortsetzt. Weil $\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})$ ein zweiseitiges Ideal und $\widehat{\varphi}(1) = 1$ (also $1 \notin \mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})$) ist, muss der Kern $= 0$ sein (weil $C(k^{2r}, \widetilde{q})$ einfach ist). Weil die Dimensionen übereinstimmen, ist $\widehat{\varphi}$ ein Isomorphismus. Also ist C^0 einfach und zentral.

b) Sei $z = e_1 e_2 \cdots e_n$. Dann ist $Z := Z(C) = k + k \cdot z$. Dabei liegt z in C^1 und ist invertierbar. Außerdem gilt:

$$z^2 = (e_1 e_2 \cdots e_n)(e_1 e_2 \cdots e_n) = q(e_1)(e_2 \cdots e_n)(e_2 \cdots e_n) = (-1)^r q(e_1) \cdots q(e_n).$$

Sei $\psi : Z \times C^0 \to C$ definiert durch $\psi(r + sz, y) := (r + sz)y$. Da ψ bilinear ist, wird eine lineare Abbildung $\widehat{\psi} : Z \otimes C^0 \to C$ induziert.

Da z invertierbar ist, liefert die Zuordnung $u \mapsto zu$ einen Isomorphismus von C^0 auf C^1. Also enthält $\widehat{\psi}(Z \otimes C^0)$ die Unterräume C^0 und C^1, d.h., $\widehat{\psi}$ ist surjektiv und damit ein Isomorphismus. Weil $r + sz$ im Zentrum von C liegt, ist stets $(r + sz)y = y(r + sz)$, also $\widehat{\psi}$ sogar ein Algebra-Isomorphismus.

Ist $\alpha := (-1)^r q(e_1) \cdots q(e_n)$ kein Quadrat in k, so ist $Z \cong k(\sqrt{\alpha})$ einfach. Damit ist aber auch C einfach.

Ist α ein Quadrat, so ist $Z \cong k \oplus k$, also $C \cong C^0 \oplus C^0$. ∎

Speziell die Algebra $C^c_{2r} = C(\mathbb{C}^n, q_n)$ ist also einfach. Das bedeutet, dass jede irreduzible treue Darstellung äquivalent zu einer festen irreduziblen Darstellung auf einem links-invarianten Ideal ist. Wir wollen nun eine solche Darstellung konstruieren.

Aus der Standard-Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (mit $n = 2r$) gewinnen wir eine neue Basis $\{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r\}$ wie folgt:

$$x_\nu := \frac{1}{2}(e_\nu + \mathrm{i}\, e_{r+\nu}) \text{ und } y_\nu := \frac{1}{2}(e_\nu - \mathrm{i}\, e_{r+\nu}) \text{ für } \nu = 1, \ldots, r.$$

Ist $q(z) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$ und $b = b_q$, so ist

$$b(x_\nu, y_\mu) = \frac{1}{4}[b(e_\nu, e_\mu) + \mathsf{i}\, b(e_{r+\nu}, e_\mu) - \mathsf{i}\, b(e_\nu, e_{r+\mu}) + b(e_{r+\nu}, e_{r+\mu})] = \frac{1}{2}\delta_{\nu\mu},$$

und analog erhält man $b(x_\nu, x_\mu) = b(y_\nu, y_\mu) = 0$ für alle ν, μ. Die Vektoren x_ν bzw. y_ν erzeugen total isotrope r-dimensionale Unterräume N und P mit $\mathbb{C}^n = N \oplus P$. Weiter gilt:

$$x_\nu^2 = y_\nu^2 = 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, r,$$

$$x_\nu x_\mu + x_\mu x_\nu = y_\nu y_\mu + y_\mu y_\nu = x_\nu y_\mu + y_\mu x_\nu = 0 \text{ für } \nu \neq \mu$$

und

$$x_\nu y_\nu + y_\nu x_\nu = 1, \text{ für } \nu = 1, \ldots, r.$$

Es sei nun $I = \{1, \ldots, r\}$, und für $J = \{\nu_1, \ldots, \nu_p\} \subset I$ mit $1 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_p \leq r$ sei $|J| = p$ und $x_J = x_{\nu_1} \cdots x_{\nu_p}$. Speziell ist $f := y_I = y_1 \cdots y_r$.

$\mathscr{I} := C_n \cdot f$ ist ein Links-Ideal in C_n. Weil $y_\nu \cdot f = 0$ für alle ν ist, bilden die Elemente $x_J \cdot f$ eine Basis von $\mathscr{I}$. Weil N total isotrop ist, stimmt die von den x_J erzeugte Unter-Algebra von C_n mit der äußeren Algebra $\bigwedge(N)$ überein. Also ist $\mathscr{I} \cong \bigwedge(N)$.

Nun wird eine Darstellung $\varrho : C_n \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathscr{I})$ definiert durch $\varrho(u)(y \cdot f) = (uy) \cdot f$, für $u, y \in C_n$. Mit Hilfe der Basen zeigt man, dass ϱ wohldefiniert ist.

Behauptung: ϱ ist surjektiv.

BEWEIS: Eine Basis von $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathscr{I})$ ist gegeben durch die Endomorphismen $\varphi_{H,J}$ mit $\varphi_{H,J}(x_H f) = x_J f$ und $\varphi_{H,J}(x_K f) = 0$ für $K \neq H$. Also ist zu zeigen:

$$\forall\, H, J \;\exists\, u \in C_n \text{ mit } u x_K f = \begin{cases} x_J f & \text{falls } K = H, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen $u := x_J z_H y_H$, mit $z_H := \prod_{i \notin H} y_i x_i$. Dabei sei $H = \{\nu_1, \ldots, \nu_p\}$.

a) Weil $y_j x_i = -x_i y_j$ und $y_i x_i = 1 - x_i y_i$ ist, gilt: $y_H x_H = \pm(y_{\nu_1} x_{\nu_1}) \cdots (y_{\nu_p} x_{\nu_p})$, und

$$y_\nu x_\nu (y_1 \cdots y_r) = (1 - x_\nu y_\nu)(y_1 \cdots y_r) = y_1 \cdots y_r.$$

Daraus folgt:

$$u x_H f = x_J z_H y_H x_H f = \pm x_J z_H (y_{\nu_1} x_{\nu_1}) \cdots (y_{\nu_p} x_{\nu_p})(y_1 \cdots y_r) = \pm x_J f.$$

b) Sei jetzt $K \neq H$. Wegen der Vertauschungsrelationen und der Beziehung $x_\nu^2 = y_\nu^2 = 0$ folgt: Gibt es ein $j \in K \setminus H$ und setzt man $K' := K \setminus \{j\}$, so ist $u x_K f = \pm x_J z_H x_j y_H x_{K'} f = 0$, denn das Produkt enthält den Faktor x_j^2. Gibt es ein $i \in H \setminus K$ und setzt man $H' := H \setminus \{i\}$, so ist $u x_K f = \pm y_J z_H y_{H'} x_K y_i f = 0$. ∎

Aus Dimensionsgründen ist ϱ dann sogar bijektiv. Weil es zu je zwei Elementen $a, b \in \mathscr{I}$ jeweils einen Endomorphismus von $\mathscr{I}$ gibt, der a in b überführt, gibt es auch ein $u \in C_n$ mit $\varrho(u)a = b$. Das bedeutet, dass $\mathscr{I}$ minimal, also irreduzibel ist.

Zu jeder komplexen Clifford-Algebra C_{2r} gibt es also eine irreduzible treue Darstellung $\varrho : C_n \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge(N))$, mit einem r-dimensionalen Raum N. Man bezeichnet dann $\bigwedge(N)$ als *Spinor-Raum* und seine Elemente als *(Dirac-)Spinoren*.

Sei $C := C_n^c$ und $S := \bigwedge(N) \cong C \cdot f$, sowie $C = C^0 \oplus C^1$ die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung. Ist $u \in C^0$, also gerade, so stimmt der Grad von uvf mit dem Grad von vf überein. Also sind die Unterräume $C^0 \cdot f$ und $C^1 \cdot f$ unter $\varrho|_{C^0}$ invariant. Die Räume $S^0 := S \cap C^0$ und $S^1 := S \cap C^1$ sind jeweils 2^{r-1}-dimensional. Die Abbildung $\varrho^0 : C^0 \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S^0) \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S^1)$ mit $u \mapsto (\varrho_u|_{S^0}, \varrho_u|_{S^1})$ ist injektiv und damit bijektiv. Man nennt $S^0 = C^0 \cdot f$ und $S^1 = C^1 \cdot f$ auch *Halb-Spin-Räume*. Die Darstellung $\varrho|_{C^0}$ zerfällt also in zwei (nicht äquivalente) irreduzible Darstellungen.

Im Falle $n = 2r+1$ ist C_n^c (als komplexe Clifford-Algebra) nicht einfach, aber C^0 ist einfach und besitzt eine eindeutig bestimmte irreduzible Darstellung. Man kann in diesem Fall zeigen, dass sie zu zwei nicht-äquivalenten irreduziblen Darstellungen von C fortgesetzt werden kann.

Sei wieder V ein n-dimensionaler k-Vektorraum mit quadratischer Form q, $C = C(V,q)$ und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine ON-Basis von V.

Mit C° sei die „entgegengesetzte Algebra“ bezeichnet. Als Menge (und k-Vektorraum) ist $C^\circ = C$, das Produkt wird definiert durch $x \circ y := yx$. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $\sigma : C \to C^\circ$. Jeder andere Algebra-Isomorphismus $\varphi : C \to C^\circ$ definiert dann automatisch einen *Anti-Automorphismus* $\widetilde{\varphi} = \sigma^{-1} \circ \varphi : C \to C$, mit $\widetilde{\varphi}(xy) = \widetilde{\varphi}(y)\widetilde{\varphi}(x)$.

Die kanonische Injektion $j^\circ : V \hookrightarrow C^\circ$ (mit $(j^\circ(v))^2 = q(v) \cdot 1$) induziert einen Algebra-Homomorphismus $\widehat{j^\circ} : C \to C^\circ$. Dabei werden Basiselemente auf Basiselemente abgebildet, es handelt sich also um einen Isomorphismus, der einen Anti-Automorphismus $C \to C$ mit $v_1 v_2 \cdots v_q \mapsto v_q \cdots v_2 v_1$ (für $v_1, \ldots, v_q \in V$) definiert. Das Bild von x wird mit $x^\top$ bezeichnet.

Speziell ist

$$1^\top = 1 \text{ und } (e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_p})^\top = e_{i_p} \cdots e_{i_2} e_{i_1}.$$

Definition.
Zusammen mit der (von der Abbildung $v \mapsto -j(v)$ induzierten) kanonischen Involution $\alpha : C \to C$ ergibt sich nun die *Konjugation*

$$x \mapsto \overline{x} := \alpha(x^\top), \text{ für } x \in C(V,q).$$

Die Abbildung $N : C(V,q) \to C(V,q)$ mit $N(x) := x \cdot \overline{x}$ nennt man die *Spinor-Norm*.

Bemerkung. Es ist $\overline{e_{i_1} \cdots e_{i_p}} = (-1)^p e_{i_p} \cdots e_{i_1}$, also

$$N(e_{i_1} \cdots e_{i_p}) = (-1)^p q(e_{i_1}) \cdots q(e_{i_p}) \cdot 1.$$

Speziell ist $N(x) = -q(x) \cdot 1$ für $x \in V$.

Beispiele.

1. In $\mathbb{C} = C_{0,1} = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot \mathsf{i}$ ist $(a + \mathsf{i}\, b)^\top = a + \mathsf{i}\, b$ und $\alpha(a + \mathsf{i}\, b) = a - \mathsf{i}\, b$. Für $z = a + \mathsf{i}\, b$ ist also $\overline{z} = a - \mathsf{i}\, b$ die konjugiert-komplexe Zahl, sowie $N(z) = z\overline{z} = a^2 + b^2$.

2. In $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = C_{1,0} = \mathbb{R} \cdot (1 + e) + \mathbb{R} \cdot (1 - e)$ (mit $V = \mathbb{R}e$ und $q(e) = 1$) ist $(a, b)^\top = (a, b)$, $\alpha(a, b) = \alpha((a+b) \cdot 1 + (a-b) \cdot e) = (a+b) \cdot 1 - (a-b) \cdot e = (b, a)$, also auch $\overline{(a, b)} = (b, a)$ und $N(a, b) = (a, b) \cdot (b, a) = ab \cdot (1, 1) = 2ab \cdot 1$. Man nennt die Elemente von $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ manchmal auch „hyperbolische komplexe Zahlen“.

3. In $\mathbb{H} = C_{0,2}$ sieht es folgendermaßen aus: Sei $Q = a + \mathsf{i}\, b + \mathsf{j}\, c + \mathsf{k}\, d \in \mathbb{H}$. Dann ist $Q^\top = a + \mathsf{i}\, b + \mathsf{j}\, c - \mathsf{k}\, d$ und $\alpha(Q) = a - \mathsf{i}\, b - \mathsf{j}\, c + \mathsf{k}\, d$, also $\overline{Q} = a - \mathsf{i}\, b - \mathsf{j}\, c - \mathsf{k}\, d$ und
$$N(Q) = Q\overline{Q} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot 1_{\mathbb{H}}\,.$$

4. Nun betrachten wir $C_{2,0} = M_2(\mathbb{R})$ mit der Clifford-Basis $\{1 = E_2, A, B, AB\}$. Ein beliebiges Element $X \in C_{2,0}$ hat die Gestalt
$$X = aE_2 + bA + cB + dAB = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix},$$
mit $a = \frac{1}{2}(s + v)$, $b = \frac{1}{2}(s - v)$, $c = \frac{1}{2}(t + u)$ und $d = \frac{1}{2}(t - u)$.

   Dann ist $X^\top = aE_2 + bA + cB - dAB = \begin{pmatrix} a+b & c-d \\ c+d & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix}$ tatsächlich die transponierte Matrix, und
$$\alpha(X) = aE_2 - bA - cB + dAB = \begin{pmatrix} a-b & -c+d \\ -c-d & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & -u \\ -t & s \end{pmatrix},$$
also
$$\overline{X} = \begin{pmatrix} v & -t \\ -u & s \end{pmatrix}.$$
Daraus folgt: $N(X) = X \cdot \overline{X} = (sv - ut) \cdot E_2 = \det(X) \cdot 1$.

5. In $C_{1,1} = M_2(\mathbb{R})$ verwenden wir die Clifford-Basis $\{1 = E_2, U, V, UV\}$. Ein beliebiges Element $X \in C_{1,1}$ hat die Gestalt
$$X = aE_2 + bU + cV + dUV = \begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b-c & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix},$$
mit $a = \frac{1}{2}(v + s)$, $b = \frac{1}{2}(t + u)$, $c = \frac{1}{2}(t - u)$ und $d = \frac{1}{2}(v - s)$.

Hier ist $X^\top = aE_2 + bU + cV - dUV = \begin{pmatrix} v & t \\ u & s \end{pmatrix}$ die an der Neben-Diagonalen gespiegelte Matrix. Weiter ist

$$\alpha(X) = aE_2 - bU - cV + dUV = \begin{pmatrix} s & -t \\ -u & v \end{pmatrix}$$

und

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} v & -t \\ -u & s \end{pmatrix}.$$

Das stimmt mit der konjugierten Matrix in $C_{2,0}$ überein, und deshalb ist auch hier $N(X) = \det(X) \cdot 1$.

Sei $C^\times(V,q)$ die multiplikative Gruppe der invertierbaren Elemente von $C(V,q)$. Ist $\gamma : C(V,q) \to \mathrm{End}_k(S)$ eine Darstellung, so kann man γ auf $C^\times(V,q)$ beschränken. Zu jedem $a \in C^\times(V,q)$ gibt es ein Inverses a^{-1} und dann gilt:

$$\gamma(a) \circ \gamma(a^{-1}) = \gamma(a \cdot a^{-1}) = \gamma(1) = \mathrm{id}_S.$$

So folgt, dass $\gamma(a) \in \mathrm{Aut}_k(S)$ ist.

Definition.

Sei G eine Gruppe. Eine *(lineare) Darstellung* von G über k ist ein Gruppenhomomorphismus $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_k(S)$ von G in die Gruppe der Automorphismen eines k-Vektorraumes S. Dann heißt S der *Darstellungsraum*, seine Dimension bezeichnet man auch als Dimension der Darstellung.

Beispiele.

1. Sei $\mathscr{A}$ eine endlich-dimensionale assoziative k-Algebra mit 1, $\mathscr{A}^\times$ die Gruppe der Einheiten von $\mathscr{A}$, also der invertierbaren Elemente. Dann induziert jede Darstellung $\gamma : \mathscr{A} \to \mathrm{End}_k(S)$ automatisch eine Darstellung $\gamma : \mathscr{A}^\times \to \mathrm{Aut}_k(S)$.

   Bekanntestes Beispiel ist die kanonische Darstellung

   $$\gamma : M_n(k) \to \mathrm{End}_k(k^n) \text{ (mit } \gamma_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A^\top).$$

   Dabei muss die Matrix transponiert werden, damit $\gamma_{AB} = \gamma_A \circ \gamma_B$ ist. Alternativ kann man die Elemente von k^n als Spaltenvektoren $\vec{x}$ auffassen und $\gamma_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ setzen.

   Es wird nun eine Darstellung der Gruppe der regulären Matrizen $\mathrm{GL}_n(k)$ in $\mathrm{Aut}_k(k^n)$ induziert.

   Umgekehrt spricht man bei einem Homomorphismus $\mu : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ von einer *Matrix-Darstellung*. Ist etwa $G = \mathrm{Aut}_k(S)$ und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von S, so gibt es zu jedem Element $f \in \mathrm{Aut}_k(S)$ Elemente $a_{ij} \in k$, so dass gilt: $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, für $j = 1, \ldots, n$. Dann wird durch $\mu(f) := A(f) := (a_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n)$ eine Matrix-Darstellung gegeben.

Ist $S = k^n$ und die Basis die Standard-Basis, so ist $\gamma(\mu(f)) = f$ und $\mu(\gamma(A)) = A$.

Ist schließlich $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_k(S)$ eine beliebige Darstellung, so ist $\mu \circ \varrho : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ eine Matrix-Darstellung. Diese hängt aber stark von der jeweils benutzten Basis von S ab.

2. Eine *Operation* einer Gruppe G auf einer Menge X ist eine Vorschrift, die jedem Paar von Elementen $g \in G$ und $x \in X$ ein Element $gx \in X$ zuordnet, so dass gilt:

   (a) $1x = x$ für alle $x \in X$, wenn $1 \in G$ das neutrale Element ist.

   (b) $g(hx) = (gh)x$ für $g, h \in G$ und $x \in X$.

   Man spricht auch von einer *Links-Operation*. Ist $x \in X$, so nennt man $Gx = \{gx : g \in G\}$ die *Bahn* oder den *Orbit* von x in X. Die Bahnen sind die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, g \in G \text{ mit } y = gx.$$

   Wenn es nur eine einzige Bahn gibt, wenn also $Gx = X$ ist, so sagt man, G operiert *transitiv* auf X.

   Sei z.B. $X = S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$, $G = SO(2)$. Für $A \in G$ sei f_A die zugehörige ebene Drehung. Dann wird durch $A \cdot (\mathbf{x}', x_3) := (f_A(\mathbf{x}'), x_3)$ eine Operation von G auf S^2 definiert. Als Bahnen erhält man alle „Breitenkreise“, sowie den „Nordpol“ und den „Südpol“.

   Jede Darstellung $\varrho : G \to \mathrm{Aut}_k(S)$ liefert eine Operation von G auf S. Man spricht dann auch von einer *linearen Operation*.

   Sei umgekehrt eine Operation der Gruppe G auf einer Menge X gegeben, und $F(X)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf X. Dann wird durch

$$[\varrho(g)f](x) := f(g^{-1}x)$$

   eine Darstellung von G auf $F(X)$ definiert.

3. Sei $\mathscr{A}$ eine endlich-dimensionale assoziative k-Algebra mit 1. Wir kennen schon die Darstellungen von $\mathscr{A}^\times$, die von Darstellungen der Algebra induziert werden. Eine andere Darstellung von $\mathscr{A}^\times$ erhält man wie folgt:

   Die *adjungierte Darstellung* $\mathrm{Ad} : \mathscr{A}^\times \to \mathrm{Aut}_k(\mathscr{A})$ wird definiert durch

$$\mathrm{Ad}(a)x := a \cdot x \cdot a^{-1}, \text{ für } a \in \mathscr{A}^\times \text{ und } x \in \mathscr{A}.$$

Besonders wichtig ist die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{Aut}_k(M_n(k))$ mit $A \mapsto (X \mapsto AXA^{-1})$.

Wir betrachten wieder eine Clifford-Algebra $C(V, q)$. Die Abbildung $\widetilde{\mathrm{Ad}} : C^\times(V, q) \to \mathrm{Aut}(C(V, q))$, definiert durch

$$\widetilde{\mathrm{Ad}} : x \mapsto \widetilde{\mathrm{Ad}}_x, \text{ mit } \widetilde{\mathrm{Ad}}_x(v) := \alpha(x)vx^{-1},$$

nennt man auch die *getwistete adjungierte Darstellung*.

Definition.
Unter der *Clifford-Gruppe* $\Gamma(V, q)$ versteht man die Gruppe

$$\Gamma(V, q) := \{x \in C^\times(V, q) \,:\, \alpha(x) \cdot V \cdot x^{-1} \subset V\}.$$

Bemerkung. Es ist klar, dass $1 \in \Gamma(V, q)$ und mit zwei Elementen x, y auch ihr Produkt xy in $\Gamma(V, q)$ ist. Da $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x$ für jedes $x \in C^\times(V, q)$ ein Automorphismus von $C(V, q)$ ist, folgt:

$$\Gamma(V, q) = \{x \in C^\times(V, q) \,:\, \alpha(x) \cdot V \cdot x^{-1} = V\}.$$

Dann ist aber klar, dass mit x auch x^{-1} zu $\Gamma(V, q)$ gehört. Also ist $\Gamma(V, q)$ tatsächlich eine Untergruppe von $C^\times(V, q)$.

Behauptung: Ist $x \in \Gamma(V, q)$, so liegen auch $\alpha(x)$ und $x^\top$ in $\Gamma(V, q)$.

Beweis: Ist $v \in V$ und $x \in \Gamma(V, q)$, so ist $\alpha(x)vx^{-1} =: w \in V$. Dann ist aber auch $w = -\alpha(w) = -x\alpha(v)\alpha(x)^{-1} = \alpha(\alpha(x))v\alpha(x)^{-1} \in V$. Das bedeutet, dass $\alpha(x)$ in $\Gamma(V, q)$ liegt.

Weil $\alpha(x^{-1})$ in $\Gamma(V, q)$ liegt, ist $x^{-1}v\alpha(x) =: y \in V$. Es ist aber $y = y^\top = \alpha(x^\top)v(x^\top)^{-1}$. Das bedeutet, dass $x^\top$ in $\Gamma(V, q)$ liegt. ∎

5.13 Satz. *Der Kern der getwisteten adjungierten Darstellung* $\widetilde{\mathrm{Ad}} : \Gamma(V, q) \to \mathrm{Aut}(V)$ *ist die Gruppe* $k^\times$*, aufgefasst als Gruppe der nicht-verschwindenden Vielfachen von* $1 \in C(V, q)$*.*

Beweis: Sei $x \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathrm{Ad}})$. Dann ist $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x = \mathrm{id}$, also $\alpha(x)vx^{-1} = v$ bzw.

$$\alpha(x)v = vx, \text{ für alle } v \in V.$$

Wir schreiben $x = x^0 + x^1$, mit $x^i \in C^i(V, q)$. Dann ergeben sich die Gleichungen

$$x^0 v = vx^0 \quad \text{ und } \quad x^1 v = -vx^1.$$

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine ON-Basis von V. Dann gibt es eine Darstellung

$$x^0 = a^0 + e_1 b^1, \text{ mit } a^0 \in C^0 \text{ und } b^1 \in C^1,$$

so dass e_1 weder in der Basisdarstellung von a^0 noch in der von b^1 vorkommt. Für $v = e_1$ erhält man nun:

$$e_1 a^0 + e_1^2 b^1 = a^0 e_1 + e_1 b^1 e_1 = e_1 a^0 - e_1^2 b^1, \text{ also } 0 = e_1^2 b^1 = q(e_1) b^1, \text{ d.h. } b^1 = 0.$$

Dabei wurde benutzt, dass $e_i e_j = -e_j e_i$ für $i \neq j$ und $e_i^2 = q(e_i) = \pm 1$ für alle i ist. Wir haben damit gezeigt, dass x^0 kein e_1 enthält. Genauso folgt aber, dass x^0 auch kein anderes e_i enthält, d.h., es ist $x^0 = t \cdot 1$ mit $t \in k$.

Als nächstes schreiben wir $x^1 = a^1 + e_1 b^0$, mit $a^1 \in C^1$ und $b^0 \in C^0$, so dass e_1 in a^1 und b^0 nicht vorkommt. In analoger Weise bekommt man heraus, dass auch x^1 kein e_i enthält. Als ungerades Element muss dann $x^1 = 0$ sein, also $x = t \cdot 1$. Weil x invertierbar ist, muss $t \neq 0$ sein.

Umgekehrt ist natürlich klar, dass alle nicht-verschwindenden Vielfachen von 1 im Kern von $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ liegen. ∎

5.14 Satz. *Die Spinor-Norm $N(x) = x\overline{x}$ induziert einen Homomorphismus*

$$N : \Gamma(V, q) \to k^\times.$$

BEWEIS: Zunächst ist zu zeigen, dass $N(\Gamma(V,q)) \subset k^\times$ ist. Dazu sei $x \in \Gamma(V,q)$. Wir wissen, dass $\alpha(x) v x^{-1} \in V$ ist, für alle $v \in V$. Daher ist

$$\alpha(x) v x^{-1} = (\alpha(x) v x^{-1})^\top = (x^\top)^{-1} v \alpha(x^\top), \text{ also } v \alpha(x^\top) x = x^\top \alpha(x) v.$$

Weil $x^\top \alpha(x) = \alpha(\alpha(x^\top) x)$ ist, bedeutet das, dass $\alpha(x^\top) x$ im Kern von $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ liegt. Also liegt $\alpha(x^\top) x$ in $k^\times$. Damit ist auch $N(x^\top) = x^\top \alpha(x) = \alpha(\alpha(x^\top) x)$ in $k^\times$. Weil mit jedem $x \in \Gamma(V,q)$ auch $x^\top \in \Gamma(V,q)$ ist, folgt: $N(x) \in \Gamma(V,q)$.

Sind $x, y \in \Gamma(V,q)$, so ist

$$N(xy) = (xy)\alpha(y^\top x^\top) = x \cdot N(y) \cdot \alpha(x^\top) = N(x) \cdot N(y),$$

weil $N(x)$ und $N(y)$ in $k^\times$ liegen. ∎

5.15 Satz. *Das Bild von $\Gamma(V,q)$ unter der getwisteten adjungierten Darstellung $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ in $\mathrm{Aut}(V)$ ist in der orthogonalen Gruppe $O(V,q)$ enthalten.*

BEWEIS: Für $x \in \Gamma(V,q)$ ist $N(\alpha(x)) = \alpha(x) x^\top = \alpha(N(x)) = N(x)$.

Dann ist $N(\widetilde{\mathrm{Ad}}_x v) = N(\alpha(x) v x^{-1}) = N(x) N(v) N(x^{-1}) = N(v)$ für $v \in V$. Für Vektoren v ist aber $N(v) = v \alpha(v^\top) = -v \cdot v = -q(v) \cdot 1$. Also respektiert $\widetilde{\mathrm{Ad}}_x$ die quadratische Form. ∎

5.16 Folgerung. *Es gibt eine exakte Sequenz*

$$1 \longrightarrow k^\times \longrightarrow \Gamma(V,q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} O(V,q) \longrightarrow 1\ .$$

BEWEIS: Ist $y \in C^\times \cap V$, so ist $y^2 = q(y)$ invertierbar, also $q(y) \neq 0$. Ist umgekehrt $y \in V$ und $q(y) \neq 0$, so ist $y \cdot (\frac{1}{q(y)} y) = 1$, also $y \in C^\times$. Damit ist

$$C^\times \cap V = \{y \in V \,:\, q(y) \neq 0\}.$$

Ist nun $y \in C^\times \cap V$, so ist $\alpha(y) = -y$ und $y^{-1} = \frac{1}{q(y)} y$, also

$$\alpha(y) v y^{-1} = -\frac{1}{q(y)} yvy = -\frac{1}{q(y)} y(-yv + 2b(v,y)) = v - \frac{2b(v,y)}{q(y)} y \in V,$$

falls $v \in V$ gilt. Damit ist $C^\times \cap V \subset \Gamma(V,q)$.

Ist $x \in C^\times \cap V$, so lässt sich jeder Vektor $v \in V$ in der Form $v = u + \lambda x$ zerlegen, mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $b_q(x,u) = 0$. Dann ist

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_x(v) = -\frac{1}{q(x)} x(u + \lambda x)x = \frac{1}{q(x)} xxu - \frac{\lambda}{q(x)} xxx = u - \lambda x.$$

Das ist die Spiegelung an der zu x orthogonalen Hyperebene. Da sich jede orthogonale Transformation aus Spiegelungen zusammensetzt, ist $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ surjektiv.

Andererseits haben wir schon gezeigt, dass $\mathrm{Ker}(\widetilde{\mathrm{Ad}}) = k^\times$ ist. Damit ist alles bewiesen. ∎