§ 4 Periodizitätssätze

Definition.

1) Ist $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$, $n = r + s$ und $q_{r,s}(\mathbf{x}) := x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2$, so setzen wir $C_{r,s} := C(V, q_{r,s})$.

Speziell sei $C_n := C_{0,n}$ und $C_n^* := C_{n,0}$.

2) Ist $k = \mathbb{C}$, $V^c = \mathbb{C}^n$ und $q_n(\mathbf{z}) := z_1^2 + \cdots + z_n^2$, so setzen wir $C_n^c := C(V^c, q_n)$.

Ist $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ die Standardbasis von V, so gilt in $C_{r,s}$:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = \begin{cases} +2\delta_{ij} & \text{falls } i \le r, \\ -2\delta_{ij} & \text{falls } i > r. \end{cases} ,$$

also $\mathbf{e}_i^2 = 1$ für $i \le r$, $\mathbf{e}_i^2 = -1$ für $i > r$ und $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$ für $i \ne j$. Auch im Falle eines beliebigen regulären quadratischen Raumes kann man eine ON-Basis mit dieser Eigenschaft finden.

Wir wissen schon:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{0,1} \cong \mathbb{C}, \\ C_1^* &= C_{1,0} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \\ C_2 &= C_{0,2} \cong \mathbb{H}, \\ & C_{1,1} = M_2(\mathbb{R}), \\ C_2^* &= C_{2,0} \cong M_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} C_{r,s} &\cong \underbrace{C_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} C_1}_{r\text{-mal}} \widehat{\otimes} \underbrace{C_1^* \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} C_1^*}_{s\text{-mal}} \\ &\cong \underbrace{\mathbb{C} \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} \mathbb{C}}_{r\text{-mal}} \widehat{\otimes} \underbrace{(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})}_{s\text{-mal}}, \end{aligned}$$

also insbesondere

$$C_n \cong \mathbb{C} \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} \mathbb{C} \quad (n\text{-mal}).$$

Bemerkung.

$$\begin{aligned} \text{In } C_3 \text{ ist } (1 + e_1e_2e_3)(1 - e_1e_2e_3) &= 1 - e_1e_2e_3e_1e_2e_3 \\ &= 1 - e_2e_3(e_1)^2e_2e_3 \\ &= 1 + e_2e_3e_2e_3 = 1 - (e_2)^2(e_3)^2 \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Wegen der natürlichen Inklusionen $C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_{k_1} \subset C_k \subset \ldots$ folgt:

Für $n \geq 3$ besitzen alle Algebren C_n Nullteiler.

Achtung! In der Literatur sind die Bezeichnungen uneinheitlich. Hier einige Beispiele:

	$C_{r,s}$	univ. Eig.	$C_{0,1}$	q_n	C_n	C_2
hier	$C_{r,s}$	$v^2 = q(v) \cdot 1$	$C_{0,1} = \mathbb{C}$	$-\lVert\mathbf{x}\rVert^2$	$C_{0,n}$	$\mathbb{H}$
[Crum]	$C(r,s)$	$v^2 = q(v) \cdot 1$	$C(0,1) = \mathbb{C}$	$-\lVert\mathbf{x}\rVert^2$	$C(0,n)$	$\mathbb{H}$
[Bu-Tr]	$Cl(r,s)$	$v^2 = q(v) \cdot 1$	$Cl(0,1) = \mathbb{C}$	$-\lVert\mathbf{x}\rVert^2$	$Cl(0,n)$	$\mathbb{H}$
[Port2]	$\mathbf{R}_{s,r}$	$v^2 = -q(v) \cdot 1$	$\mathbf{R}_{0,1} = \mathbb{C}$	$--$	$--$	$--$
[Law-Mi]	$Cl_{s,r}$	$v^2 = -q(v) \cdot 1$	$Cl_{0,1} = \mathbb{R}^2$	$\lVert\mathbf{x}\rVert^2$	$Cl_{n,0}$	$\mathbb{H}$
[Huse]	$--$	$v^2 = q(v) \cdot 1$	$--$	$-\lVert\mathbf{x}\rVert^2$	C_n	$\mathbb{H}$
[Frie]	$--$	$v^2 = q(v) \cdot 1$	$--$	$-\lVert\mathbf{x}\rVert^2$	C_n	$\mathbb{H}$

Wir wollen nun die Struktur der Algebren $C_{r,s}$ näher untersuchen. Dafür müssen wir uns noch einmal mit Tensorprodukten befassen:

4.1 Satz. *Sei C eine assoziative k-Algebra mit 1 und $A, B \subset C$ zwei Unteralgebren, so dass gilt:*

1. *C wird von A und B erzeugt.*
2. *Es ist $\dim_k(C) = \dim_k(A) \cdot \dim_k(B)$.*
3. *Für alle $a \in A$ und $b \in B$ ist $ab = ba$.*

Dann sind $A \otimes B$ und C als k-Algebren isomorph.

Beweis: Die bilineare Abbildung $\varphi : A \times B \to C$ mit $\varphi(a,b) := ab$ induziert eine lineare Abbildung $\widehat{\varphi} : A \otimes B \to C$ mit $\widehat{\varphi}(a \otimes b) := ab$. Weiter ist

$$\widehat{\varphi}((a \otimes b) \cdot (a' \otimes b')) = (aa')(bb') = (ab)(a'b') = \widehat{\varphi}(a \otimes b) \cdot \widehat{\varphi}(a' \otimes b').$$

Daraus folgt, dass $\widehat{\varphi}$ ein Homomorphismus von Algebren ist. Wegen (1) ist $\widehat{\varphi}$ surjektiv, wegen (3) sogar ein Isomorphismus. ∎

Beispiel.

Wir zeigen, dass es einen $\mathbb{R}$-Algebra-Isomorphismus $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ mit $z \otimes 1 \mapsto (z,z)$ und $1 \otimes w \mapsto (w, \overline{w})$ gibt.

Sei $A := \{(z,z) : z \in \mathbb{C}\}$ und $B := \{(w, \overline{w}) : w \in \mathbb{C}\}$. Das sind zwei Unteralgebren von $C := \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, die beide (als $\mathbb{R}$-Algebren) isomorph zu $\mathbb{C}$ sind. Offensichtlich sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Daraus ergibt sich die gewünschte Isomorphie.

4.2 Satz. *Ist S eine (endlich-dimensionale) k-Algebra und $M_n(k)$ die Algebra der n-reihigen quadratischen Matrizen (über k), so ist*

$$S \otimes M_n(k) \cong M_n(S).$$

BEWEIS: Für $s \in S$ und $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ sei $s \cdot A := (a_{ij} \cdot s)$. Die bilineare Abbildung $S \times M_n(k) \to M_n(S)$ mit $(s, A) \mapsto s \cdot A$ induziert einen Algebra-Homomorphismus $\varphi : S \otimes M_n(k) \to M_n(S)$.

Ist $E_{ij} \in M_n(k)$ die Matrix, die eine Eins an der Position (i, j) und sonst lauter Nullen enthält, so ist $\varphi(\sum_{i,j} s_{ij} \otimes E_{ij}) = (s_{ij})$. Deshalb ist φ surjektiv und aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. ∎

4.3 Folgerung. *Es ist $M_n(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \cong M_n(\mathbb{C})$, $M_n(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \cong M_n(\mathbb{H})$ und*

$$M_p(k) \otimes M_n(k) \cong M_{pn}(k).$$

Ist $A = (a_{ij}) \in M_p(k)$ und $B \in M_n(k)$, so wird $A \otimes B \in M_p(k) \otimes M_n(k)$ auf das (ebenfalls mit $A \otimes B$ bezeichnete) *Kronecker-Produkt* abgebildet:

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1p}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & \cdots & a_{pp}B \end{pmatrix} \in M_{pn}(k) \ .$$

Wir kommen nun zu dem wichtigsten Satz dieses Abschnittes, der zeigt, wie sich höhere Cliffordalgebren aus niedrigeren aufbauen lassen.

4.4 Satz. *Es seien (E, q), (E', q') n-dimensionale reguläre quadratische Räume und (E_2, q_2) 2-dimensional. Außerdem sei $\{e_1, e_2\}$ eine ON-Basis von E_2, und es gebe einen Isomorphismus $\varphi : E' \to E$ mit $q' = -q_2(e_1)q_2(e_2)\varphi^* q$.*

Dann induziert die lineare Abbildung $u : E' \oplus E_2 \to C(E_2, q_2) \otimes C(E, q)$ mit

$$u(x' + y) := (e_1 e_2 \otimes \varphi(x')) + (y \otimes 1)$$

einen Algebra-Isomorphismus

$$\widehat{u} : C(E' \oplus E_2, q' + q_2) \to C(E_2, q_2) \otimes C(E, q).$$

Man beachte, dass $q_2(e_1)q_2(e_2) = \pm 1$ ist. Das Tensorprodukt im Satz ist das gewöhnliche Tensorprodukt, nicht das graduierte Tensorprodukt!

Beweis: Wir schreiben $x = \varphi(x')$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
u(x'+y)^2 &= [(e_1e_2 \otimes x) + (y \otimes 1)] \cdot [(e_1e_2 \otimes x) + (y \otimes 1)] \\
&= (e_1e_2)^2 \otimes x^2 + y^2 \otimes 1 + (e_1e_2y) \otimes x + (ye_1e_2) \otimes x \\
&= \sigma \cdot 1 \otimes x^2 + y^2 \otimes 1 + (ye_1e_2 + e_1e_2y) \otimes x,
\end{aligned}
$$

mit $\sigma := -q_2(e_1)q_2(e_2)$.

Ist $y = \alpha e_1 + \beta e_2$, so ist

$$ye_1e_2 + e_1e_2y = \alpha e_1^2 e_2 - \beta e_2^2 e_1 - \alpha e_1^2 e_2 + \beta e_2^2 e_1 = 0,$$

also

$$
\begin{aligned}
u(x'+y)^2 &= \sigma \cdot 1 \otimes x^2 + q_2(y) \cdot 1 \otimes 1 \\
&= (\sigma \cdot q(\varphi(x')) + q_2(y)) \cdot 1 \otimes 1 \\
&= (q'(x') + q_2(y)) \cdot 1 \otimes 1 \\
&= (q' + q_2)(x'+y) \cdot 1 \otimes 1.
\end{aligned}
$$

Wegen der universellen Eigenschaft der Clifford-Algebra gibt es einen Algebra-Homomorphismus

$$\widehat{u} : C(E' \oplus E_2, q' + q_2) \to C(E_2, q_2) \otimes C(E, q).$$

Das Bild von $\widehat{u}$ enthält die Elemente $u(0 + e_i) = e_i \otimes 1$ und $u(x' + 0) = e_1e_2 \otimes x$, also auch $(e_1e_2 \otimes x)(e_1e_2 \otimes 1) = -\sigma \cdot 1 \otimes x$. Da diese Elemente die rechte Seite erzeugen, ist $\widehat{u}$ surjektiv. Da beide Seiten 2^{n+2}-dimensional sind, ist $\widehat{u}$ sogar ein Isomorphismus. ∎

4.5 Satz. *Ist $r > 0$ oder $s > 0$, so ist*

$$
\begin{aligned}
C_{r+1,s+1} &\cong C_{1,1} \otimes C_{r,s}, \\
C_{s+2,r} &\cong C_{2,0} \otimes C_{r,s} \\
\textit{und} \quad C_{s,r+2} &\cong C_{0,2} \otimes C_{r,s}.
\end{aligned}
$$

Beweis: Im ersten Fall sei $(E', q') = (E, q) = (\mathbb{R}^{r+s}, q_{r,s})$, $\varphi = \mathrm{id}$ und $(E_2, q_2) = (\mathbb{R}^2, q_{1,1})$. Dann ist $-q_2(e_1)q_2(e_2)\varphi^* q = -1 \cdot (-1)q = q = q'$ und daher

$$C(\mathbb{R}^{r+s+2}, q_{r+1,s+1}) \cong C(\mathbb{R}^2, q_{1,1}) \otimes C(\mathbb{R}^{r+s}, q_{r,s}).$$

Im zweiten Fall sei $(E', q') = (\mathbb{R}^{s+r}, q_{s,r})$, $(E, q) = (\mathbb{R}^{r+s}, q_{r,s})$ und $(E_2, q_2) = (\mathbb{R}^2, q_{2,0})$, sowie $\varphi(x'', x') = (x', x'')$, mit $x' = (x_1, \ldots, x_r)$ und $x'' = (x_{r+1}, \ldots, x_{r+s})$. Dann ist $\varphi^* q(x'', x') = q(x', x'') = q_{r,s}(x', x'') = \|x'\|^2 - \|x''\|^2 = -q_{s,r}(x'', x')$, also $-q_2(e_1)q_2(e_2)\varphi^* q = -1 \cdot 1 \cdot \varphi^* q = q'$ und

$$C(\mathbb{R}^{s+2+r}, q_{s+2,r}) \cong C(\mathbb{R}^2, q_{2,0}) \otimes C(\mathbb{R}^{r+s}, q_{r,s}).$$

Im dritten Fall sei $(E', q') = (\mathbb{R}^{s+r}, q_{s,r})$, $(E, q) = (\mathbb{R}^{r+s}, q_{r,s})$ und $(E_2, q_2) = (\mathbb{R}^2, q_{0,2})$, sowie $\varphi(x'', x') = (x', x'')$. Dann ist auch hier $\varphi^* q = -q'$ und $-q_2(e_1)q_2(e_2)\varphi^* q = -(-1)\cdot(-1)\cdot(-q') = q'$ und

$$C(\mathbb{R}^{s+r+2}, q_{s,r+2}) \cong C(\mathbb{R}^2, q_{0,2}) \otimes C(\mathbb{R}^{r+s}, q_{r,s}).$$

■

Man bezeichnet solche Sätze auch als *Periodizitätssätze*.

4.6 Folgerung.

$$\begin{aligned} C_{r,r} &\cong \bigotimes^r C_{1,1} \textit{ für } r \geq 1, \\ C_{r+k,r} &\cong \bigotimes^r C_{1,1} \otimes C_{k,0} \textit{ für } r \geq 1 \textit{ und } k \geq 1 \\ \textit{und } C_{k,0} &\cong C_{2,0} \otimes C_{0,2} \otimes C_{k-4,0} \textit{ für } k > 4. \end{aligned}$$

BEWEIS: Die erste Formel ergibt sich sofort aus der ersten Formel des Satzes, ebenso die zweite. Aus den beiden anderen Formeln des Satzes erhält man

$$C_{k,0} \cong C_{2,0} \otimes C_{0,k-2} \cong C_{2,0} \otimes C_{0,2} \otimes C_{k-4,0}.$$

■

Beispiele.

1. Es ist $C_{3,0} \cong C_{2,0} \otimes C_{0,1} = M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} = M_2(\mathbb{C})$ und $C_{0,3} \cong C_{0,2} \otimes C_{1,0} = \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{H}^2$.

2. Es ist $C_{2,1} \cong C_{2,0} \otimes C_{1,0} = M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^2 \cong M_2(\mathbb{R})^2$. Weiter ist $C_{1,2} \cong C_{0,2} \otimes C_{0,1} = \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$, und andererseits $C_{1,2} \cong C_{1,1} \otimes C_{0,1} = M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$. Daraus gewinnt man die Gleichung

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C}).$$

3. Es ist $C_{2,2} \cong C_{1,1} \otimes C_{1,1} = M_2(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong M_4(\mathbb{R})$, aber andererseits auch $C_{2,2} \cong C_{0,2} \otimes C_{0,2} = \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$, woraus folgt:

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong M_4(\mathbb{R}).$$

4. Für die restlichen $C_{r,s}$ mit $r + s = 4$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} C_{4,0} &\cong C_{2,0} \otimes C_{0,2} = M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{H}), \\ C_{3,1} &\cong C_{1,1} \otimes C_{2,0} = M_2(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong M_4(\mathbb{R}), \\ C_{1,3} &\cong C_{1,1} \otimes C_{0,2} = M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{H}) \\ \text{und } C_{0,4} &\cong C_{0,2} \otimes C_{2,0} = \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong M_2(\mathbb{H}). \end{aligned}$$

4.7 Satz. *Es ist* $C_{s+2,r} \cong C_{r,s} \otimes M_2(\mathbb{R})$ *und* $C_{s,r+2} \cong C_{r,s} \otimes \mathbb{H}$, *sowie*

$$C_{s+4,r} \cong C_{s,r+4} \cong C_{s,r} \otimes M_2(\mathbb{H}).$$

BEWEIS: Die ersten beiden Aussagen sind trivial, die dritte folgt daraus (weil $M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} = M_2(\mathbb{H})$ ist). ∎

4.8 Periodizitätssatz. *Es ist*

$$C_{r+8,s} \cong C_{r,s+8} \cong C_{r+4,s+4} \cong C_{r,s} \otimes M_{16}(\mathbb{R}).$$

BEWEIS: Es ist $C_{p,p} \cong \underbrace{C_{1,1} \otimes \ldots \otimes C_{1,1}}_{p\text{-mal}} = M_2(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong M_{2^p}(\mathbb{R})$, also

$$C_{r+4,s+4} \cong C_{r,s} \otimes (C_{1,1} \otimes C_{1,1} \otimes C_{1,1} \otimes C_{1,1}) \cong C_{r,s} \otimes M_{16}(\mathbb{R}).$$

Weiter ist $C_{r+8,s} \cong C_{r+4,s+4} \cong C_{r,s+8}$, nach dem vorigen Satz. ∎

Man spricht auch vom „spinoriellen Schachbrett“. Kennt man die 64 Clifford-Algebren $C_{r,s}$ mit $0 \le r, s \le 8$, so ergeben sich alle anderen daraus mit Hilfe der gerade bewiesenen Periodizität. Speziell erhält man für $C_n = C_{0,n}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
C_n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}^2$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R})^2$

Für $n = 0, \ldots, 4$ haben wir die Werte schon berechnet. Dann ist

$$\begin{aligned}
C_5 &= C_{0,5} \cong C_{0,1} \otimes M_2(\mathbb{H}) \cong \mathbb{C} \otimes M_2(\mathbb{H}) \cong M_4(\mathbb{C}),\\
C_6 &= C_{0,6} \cong C_{0,2} \otimes M_2(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{H}) \cong M_4(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong M_8(\mathbb{R}),\\
C_7 &= C_{0,7} \cong C_{0,3} \otimes M_2(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H}^2 \otimes M_2(\mathbb{H}) \cong M_8(\mathbb{R})^2.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$C_{n+8} \cong C_n \otimes M_{16}(\mathbb{R}) \cong M_{16}(C_n).$$

Wir wollen nun noch den komplexen Fall untersuchen.

Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kann natürlich auch als Element von $\mathbb{C}^n$ aufgefasst werden. Die $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ mit $\varphi(\mathbf{x}, c) := c\mathbf{x}$ liefert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ mit $\mathbf{x} \otimes c \mapsto c\mathbf{x}$. Offensichtlich handelt es sich um einen Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i \otimes z_i.$$

Die $\mathbb{R}$-Basis $\{\mathbf{e}_1 \otimes 1, \dots, \mathbf{e}_n \otimes 1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathsf{i}, \dots, \mathbf{e}_n \otimes \mathsf{i}\}$ von $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}$ ergibt die Basis $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathsf{i}\,\mathbf{e}_1, \dots, \mathsf{i}\,\mathbf{e}_n\}$ von $\mathbb{C}^n$. Allgemein bezeichnet man den Übergang $V \to V^c := V \otimes \mathbb{C}$ als die *Komplexifizierung* des (reellen) Vektorraumes V. Es ist $V^c \cong V \oplus V$, mit $\mathsf{i} \cdot (u, v) = (-v, u)$. Die komplexe Struktur auf V^c ist gegeben durch $c' \cdot (\mathbf{x} \otimes c) = \mathbf{x} \otimes (c'c)$.

Ist q eine quadratische Form auf dem $\mathbb{R}^n$, mit zugehöriger Bilinearform b, so definiert man die komplexe Bilinearform $b^c : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ durch $b^c(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) := b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, für $i, j = 1, \dots, n$. Die komplexe quadratische Form q^c wird definiert durch $q^c(\mathbf{x}) = b^c(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Zum Beispiel gehört zu der reellen quadratischen Form $q_{r,s}(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_{r+s}^2$ die komplexe quadratische Form

$$q_{r,s}^c(\mathbf{z}) = z_1^2 + \cdots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \ldots - z_{r+s}^2.$$

Nun kann man aber die Standardbasis durch eine Basis $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ ersetzen, mit

$$\mathbf{a}_k := \begin{cases} \mathsf{i} \cdot \mathbf{e}_k & \text{für } k = 1, \dots, r \\ \mathbf{e_k} & \text{für } k = r+1, \dots, r+s. \end{cases}$$

Dann ist

$$q_{r,s}^c(w_1\mathbf{a}_1 + \cdots + w_n\mathbf{a}_n) = -w_1^2 - \cdots - w_n^2 = q_n(w_1, \dots, w_n),$$

mit der Standardform q_n. Die Isometrie $(\mathbb{C}^n, q_{r,s}^c) \cong (\mathbb{C}^n, q_n)$ liefert einen Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren:

$$C_n^c = C(\mathbb{C}^n, q_n) \cong C_{r,s} \otimes \mathbb{C}, \text{ für } r + s = n.$$

Insbesondere gilt:

4.9 Satz. *Es ist $C_{2k}^c \cong M_{2^k}(\mathbb{C})$ und $C_{2k+1}^c \cong (M_{2^k}(\mathbb{C}))^2$, für $k \geq 0$.*

BEWEIS: Zunächst ist $C_0^c \cong C_0 \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{R} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$ und $C_1^c \cong C_{0,1} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$, eine etwas schwer zu durchschauende Algebra. Es ist aber auch $C_1^c \cong C_{1,0} \otimes \mathbb{C} \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Weiter ist $C_2^c \cong M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$, und schließlich induktiv

$$\begin{aligned} C_{2k}^c \;\cong\; C_{2k} \otimes \mathbb{C} \;&=\; C_{0,2k} \otimes \mathbb{C} \;\cong\; (C_{0,2k-2} \otimes \mathbb{H}) \otimes \mathbb{C} \\ &\cong\; C_{0,2k-2} \otimes (\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}) \;\cong\; C_{2k-2} \otimes M_2(\mathbb{C}) \\ &\cong\; C_{2k-2}^c \otimes M_2(\mathbb{R}) \\ &\cong\; M_{2^{k-1}}(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{R}) \\ &\cong\; M_{2^k}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} C_{2k+1}^c \;\cong\; C_{2k+1} \otimes \mathbb{C} \;&\cong\; (C_{0,2k-1} \otimes \mathbb{H}) \otimes \mathbb{C} \\ &\cong\; C_{2k-1} \otimes M_2(\mathbb{C}) \\ &\cong\; (M_{2^{k-1}}(\mathbb{C}))^2 \otimes M_2(\mathbb{R}) \\ &\cong\; (M_{2^k}(\mathbb{C}))^2. \end{aligned}$$

■

Die Isomorphismen sind hier natürlich alle $\mathbb{C}$-Algebra-Isomorphismen.

Für Physiker ist natürlich $C_4^c \cong C_{3,1} \otimes \mathbb{C} \cong C_{1,3} \otimes \mathbb{C} \cong M_4(\mathbb{C})$ von besonderem Interesse. Diese Clifford-Algebra wollen wir noch etwas genauer studieren. Wir betrachten den $\mathbb{R}^4$ mit dem inneren Produkt

$$q_{1,3}(x_0, x_1, x_2, x_3) := x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Dann ist $C(\mathbb{R}^4, q_{1,3}) = C_{1,3} \cong C_{0,2} \otimes C_{1,1} \cong \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R})$. Die Clifford-Algebra $M_2(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R}^2, q_{1,1})$ enthält eine ON-Basis von $\mathbb{R}^2$ in Form der Matrizen $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\varphi(a, b) = (b, a)$. Dann ist $\varphi^* q_{1,1} = -q_{1,1}$. Betten wir $\mathbb{R}^2$ in $C(\mathbb{R}^2, q_{0,2}) \cong \mathbb{H} \cong \mathscr{H}$ so ein, dass I und J eine ON-Basis bilden, so ist $q_{0,2}(I) \cdot q_{0,2}(J) = (-1)(-1) = 1$. Dann induziert die lineare Abbildung $u : \mathbb{R}^4 \to \mathscr{H} \otimes M_2(\mathbb{R})$ mit

$$u(x_0, x_1, x_2, x_3) := K \otimes (x_0 V + x_1 U) + (x_2 I + x_3 J) \otimes E$$

einen Isomorphismus $\widehat{u} : C(\mathbb{R}^4, q_{1,3}) \to \mathscr{H} \otimes M_2(\mathbb{R})$. Die Clifford-Algebra des Minkowskiraumes wird also von folgender ON-Basis erzeugt:

$$\Gamma_0 := u(\mathbf{e}_0) = K \otimes V = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 := u(\mathbf{e}_1) = K \otimes U = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 := u(\mathbf{e}_2) = I \otimes E_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 := u(\mathbf{e}_3) = J \otimes E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $\Gamma_0^2 = K^2 \otimes V^2 = E_4$, $\Gamma_1^2 = K^2 \otimes U^2 = -E_4$, $\Gamma_2^2 = I^2 \otimes E_2 = -E_4$ und $\Gamma_3^2 = J^2 \otimes E_2 = -E_4$, sowie

$$\begin{aligned}
\Gamma_0\Gamma_1 + \Gamma_1\Gamma_0 &= K^2 \otimes (VU + UV) \;=\; 0\,,\\
\Gamma_0\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_0 &= (KI + IK) \otimes V \;=\; 0\,,\\
\Gamma_0\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_0 &= (KJ + JK) \otimes V \;=\; 0\,,\\
\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_1 &= (KI + IK) \otimes U \;=\; 0\,,\\
\Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_1 &= (KJ + JK) \otimes U \;=\; 0\,,\\
\Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_2 &= (IJ + JI) \otimes E_2 \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Man nennt $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ ein System von *Dirac-Matrizen.*

In der Physik werden üblicherweise andere Systeme von Dirac-Matrizen benutzt, deren Herleitung immer ein bisschen mysteriös bleibt. Wir müssen dazu etwas weiter ausholen.

Sei $S := \{A \in M_2(\mathbb{C}) \;:\; \mathrm{Spur}(A) = 0\}$. Eine Basis dieses 3-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums bilden die sogenannten *Pauli-Spin-Matrizen*:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen sind zugleich so gewählt, dass sie auch hermitesch sind: $\overline{\sigma}_\nu^\top = \sigma_\nu$. Sie bilden ein wichtiges Hilfsmittel in der Darstellungstheorie, allerdings bevorzugen die Mathematiker die schief-hermiteschen Matrizen $\tau_\nu := \mathrm{i}\,\sigma_\nu$, $\nu = 1, 2, 3$. Dabei besteht folgender Zusammenhang: Sei $\sigma : S \to S$ definiert durch $\sigma(X) := \overline{X}^\top$. Das ist eine $\mathbb{R}$-lineare Involution, die genau die Eigenwerte ± 1 besitzt. So erhält man die Zerlegung $S = S_+ \oplus S_-$, mit reellen Unterräumen

$$\begin{aligned}
S_+ &:= \{X \in S \,:\, \sigma(X) = X\} \;=\; \{X \in S \,:\, \overline{X}^\top = X\}\\
\text{und } S_- &:= \{X \in S \,:\, \sigma(X) = -X\} \;=\; \{X \in S \,:\, \overline{X}^\top = -X\}.
\end{aligned}$$

Offensichtlich bilden die Pauli-Matrizen σ_ν eine reelle Basis des Raumes S_+ der hermiteschen Matrizen in S, während die τ_ν eine Basis von S_- bilden.

Der Imaginärteil $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ des Raums der Quaternionen entspricht unter dem Isomorphismus $\mathbb{H} \cong \mathscr{H}$ dem Raum

$$S_- = \{H = \begin{pmatrix} b\mathrm{i} & c + d\mathrm{i} \\ -c + d\mathrm{i} & -b\mathrm{i} \end{pmatrix} = b\tau_3 + c\tau_2 + d\tau_1 \;:\; b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Führt man noch $\sigma_0 := E_2$ ein, so kann man einen Isomorphismus

$$\tau : \mathbb{R}^4 \to H_2 := \{X \in M_2(\mathbb{C}) \,:\, \overline{X}^\top = X\}$$

auf den Raum **aller** hermiteschen Matrizen definieren, durch

$$\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) := x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 + x_4\sigma_0 = \begin{pmatrix} x_4 + x_3 & x_1 - \mathrm{i}\,x_2 \\ x_1 + \mathrm{i}\,x_2 & x_4 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\det(\tau(\mathbf{x})) = x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -q_{3,1}(\mathbf{x})$ und $\frac{1}{2}\mathrm{Spur}(\tau(\mathbf{x})) = x_4$.

Ist $A \in SL(2,\mathbb{C})$ (also $\det(A) = 1$) und $X \in H_2$, so ist auch $A \cdot X \cdot \overline{A}^\top \in H_2$. Deshalb wird durch

$$\psi(A)\mathbf{x} := \tau^{-1}(A \cdot \tau(\mathbf{x}) \cdot \overline{A}^\top)$$

ein Element $\psi(A) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^4)$ definiert. Es gilt:

1. $q_{3,1}(\psi(A)\mathbf{x}) = -\det(A \cdot \tau(\mathbf{x}) \cdot \overline{A}^\top) = -\det(A)^2 \det \tau(\mathbf{x}) = q_{3,1}(\mathbf{x})$. Also ist $\psi(A)$ eine Lorentz-Transformation. $SL(2,\mathbb{C})$ ist zusammenhängend und die Abbildung ψ ist stetig. Also muss das Bild von ψ in $\mathscr{L}_+^\uparrow$ liegen.

2. Es ist $\psi(A \cdot B) = \psi(A) \circ \psi(B)$, also ψ ein Gruppenhomomorphismus.

3. Ist $A \in \mathrm{Ker}(\psi)$, so ist $A \cdot X \cdot \overline{A}^\top = X$ für alle $X \in H_2$. Setzt man $X = E_2$, so erhält man $A \cdot \overline{A}^\top = E_2$, also $A \cdot X = X \cdot A$ für alle $X \in H_2$. Genauso gilt dies dann auch für alle Matrizen $\mathrm{i}\, X$, $X \in H_2$, und damit überhaupt für alle Matrizen $X \in M_2(\mathbb{C})$. Das bedeutet, dass $A = \lambda E_2$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ist. Wegen $1 = \det(A) = \lambda^2$ muss $A \in \mathbb{Z}_2 = \{\pm E_2\}$ gelten, also $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \cong \mathscr{L}_+^\uparrow$. Dass ψ surjektiv ist, tragen wir noch nach.

Sei $U(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \,:\, A \cdot \overline{A}^\top = E_2\}$ die Gruppe der *unitären* 2×2-Matrizen, $SU(2) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \cap U(2)$. Die Elemente von $SU(2)$ haben die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix}, \text{ mit } w\overline{w} + z\overline{z} = 1.$$

Das sind aber gerade die Elemente von S^3, der Menge der Quaternionen vom Betrag 1. Weil in diesem Fall $\overline{A}^\top = A^{-1}$ ist, ist $A \mapsto \psi(A)|_{\mathbb{R}^3}$ der schon in §3 behandelte surjektive Homomorphismus von S^3 auf $SO(3)$.

Behauptung: $\psi : SL(2,\mathbb{C}) \to \mathscr{L}_+^\uparrow$ ist surjektiv.

Beweis: a) Wie wir gerade gesehen haben, enthält das Bild von ψ alle Lorentz-Transformationen der Gestalt $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $A \in SO(3)$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ liegt $S(\alpha) := \begin{pmatrix} e^{\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha/2} \end{pmatrix}$ in $SL(2,\mathbb{C})$, ist aber nicht unitär. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \psi(S(\alpha))(x_1, x_2, 0, 0) &= \tau^{-1}\left(S(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 0 & x_1 - \mathrm{i}\, x_2 \\ x_1 + \mathrm{i}\, x_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot S(\alpha)\right) \\ &= \tau^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 & x_1 - \mathrm{i}\, x_2 \\ x_1 + \mathrm{i}\, x_2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= (x_1, x_2, 0, 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\psi(S(\alpha))(0,0,x_3,x_4) &= \tau^{-1}\left(S(\alpha)\cdot\begin{pmatrix} x_4+x_3 & 0 \\ 0 & x_4-x_3\end{pmatrix}\cdot S(\alpha)\right)\\ &= \tau^{-1}\left(\begin{pmatrix} e^{\alpha}(x_4+x_3) & 0 \\ 0 & e^{-\alpha}(x_4-x_3)\end{pmatrix}\right)\\ &= (0,0,\sinh(\alpha)x_4+\cosh(\alpha)x_3,\cosh(\alpha)x_4+\sinh(\alpha)x_3).\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\psi(S(\alpha))$ durch folgenden Lorentz-Boost beschrieben wird:

$$\psi(S(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ 0 & 0 & \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Damit sind alle Elemente von $\mathscr{L}_+^{\uparrow}$ im Bild von ψ enthalten. ■

Zurück zu den Pauli-Matrizen: Es ist

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = E_2,$$

sowie

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = \mathsf{i}\,\sigma_3,\ \sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = -\mathsf{i}\,\sigma_2 \text{ und } \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = \mathsf{i}\,\sigma_1.$$

Insbesondere erhält man:

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Je zwei Pauli-Matrizen bilden also ein System von 2-dimensionalen Dirac-Matrizen. Genauer gilt:

A) $U = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ und $V = \mathsf{i}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$ erzeugen die Clifford-Algebra $C_{1,1} = M_2(\mathbb{R})$, mit $UV = -\sigma_3$.

B) $A = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ und $B = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ erzeugen die Clifford-Algebra $C_{2,0} = M_2(\mathbb{R})$, mit $AB = -\mathsf{i}\,\sigma_2$.

C) $I = \mathsf{i}\,\sigma_3 = \begin{pmatrix} \mathsf{i} & 0 \\ 0 & -\mathsf{i}\end{pmatrix}$ und $J = \mathsf{i}\,\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$ erzeugen die Clifford-Algebra $C_{0,2} = \mathbb{H}$, mit $K = IJ = \mathsf{i}\,\sigma_1$, als Unteralgebra von $M_2(\mathbb{C})$.

Mit $\sigma_0 = E_2$ kann man jetzt ein reelles System von Dirac-Matrizen für $C_{3,1} \cong C_{2,0} \otimes C_{1,1} \cong M_4(\mathbb{R})$ entwerfen:

$$\Gamma_1' \;:=\; AB \otimes U \;=\; -\mathsf{i}\,\sigma_2 \otimes \sigma_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2' \;:=\; AB \otimes V \;=\; -\mathsf{i}\,\sigma_2 \otimes (\mathsf{i}\,\sigma_2) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3' \;:=\; A \otimes 1 \;=\; \sigma_3 \otimes \sigma_0 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_4' \;:=\; B \otimes 1 \;=\; \sigma_1 \otimes \sigma_0 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Man spricht hier wohl auch von der „Majorana-Darstellung“, aber genauer kann hier nicht darauf eingegangen werden.

Die Original-Dirac-Matrizen werden anders definiert, nämlich durch

$$\gamma_i := \mathsf{i}\,\sigma_2 \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ für } i = 1,2,3$$

$$\text{und} \quad \gamma_0 := \sigma_3 \otimes \sigma_0 = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}.$$

Leider ist es schwer, eine theoretische Grundlage für diese Darstellung zu finden.

Offensichtlich ist $\gamma_i^2 = -\sigma_2^2 \otimes \sigma_i^2 = -1$ für $i = 1,2,3$, sowie $\gamma_0^2 = \sigma_3^2 \otimes \sigma_0^2 = 1$. Außerdem ist

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -\sigma_2^2 \otimes (\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i) = 0 \text{ für } 1 \le i,j \le 3,\ i \ne j,$$

sowie

$$\gamma_i\gamma_0 + \gamma_0\gamma_i = 0.$$

Es handelt sich also wirklich um ein Sytem von Dirac-Matrizen. Es gilt:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathsf{i} \\ 0 & 0 & \mathsf{i} & 0 \\ 0 & \mathsf{i} & 0 & 0 \\ -\mathsf{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$