§ 3 Die Clifford-Algebra

Definition.
Sei (V, q) ein quadratischer Raum über dem Körper k. Unter einer *Clifford-Algebra* für (V, q) versteht man ein Paar (C, j) mit folgenden Eigenschaften:

1. $C = C(V, q)$ ist eine assoziative k-Algebra mit Eins-Element.
2. $j : V \to C$ ist k-linear, und es gilt:
$$j(x)^2 = q(x) \cdot 1, \text{ für alle } x \in V.$$
3. C wird von $j(V)$ als Algebra erzeugt.
4. Ist A irgend eine assoziative Algebra mit Eins-Element 1_A und $u : V \to A$ eine k-lineare Abbildung mit $u(x)^2 = q(x) \cdot 1_A$, so gibt es einen Algebra-Homomorphismus $\widehat{u} : C \to A$ mit $u = \widehat{u} \circ j$.

Derartige Algebren wurden zuerst 1878 von William Kingdon Clifford beschrieben. Ist b die zur quadratischen Form q gehörende symmetrische Bilinearform, so gilt für $x, y \in V$:
$$j(x) \cdot j(y) + j(y) \cdot j(x) = 2b(x, y) \cdot 1.$$
Das folgt sofort, wenn man $j(x + y)^2$ berechnet.

3.1 Satz.

a) Zu jedem quadratischen Raum (V, q) gibt es eine ($\mathbb{Z}_2$-graduierte) Clifford-Algebra.

b) Sind (C, j), (C', j') zwei Clifford-Algebren zu (V, q), so gibt es genau einen Algebra-Isomorphismus $f : C \to C'$ mit $f \circ j = j'$.

BEWEIS: a) Sei $I = I(q) \subset T(V)$ das zweiseitige Ideal, das von den Elementen
$$x \otimes x - q(x) \cdot 1, \quad x \in V,$$
erzeugt wird. Sei $i : V \hookrightarrow T(V)$ die kanonische Injektion. Wir setzen $C(V, q) := T(V)/I$ und $j := p \circ i$, wobei $p : T(V) \to T(V)/I$ die kanonische Projektion ist. Da das Ideal I $\mathbb{Z}_2$-graduiert ist (denn es wird von Elementen aus $T_0(V)$ erzeugt), ist $C = C(V, q)$ eine $\mathbb{Z}_2$-graduierte assoziative k-Algebra und j eine k-lineare Abbildung. Weiter ist
$$\begin{aligned} j(x)^2 &= p(i(x))^2 = p(i(x)^2) \\ &= p(x \otimes x) = p(q(x) \cdot 1 + \text{ Element von } I \\ &= q(x) \cdot 1. \end{aligned}$$
Da $T(V)$ von $i(V)$ erzeugt wird, wird auch C von $j(V)$ erzeugt.

Sei A eine beliebige Algbra, $u : V \to A$ linear und $u(x)^2 = q(x) \cdot 1_A$ für $x \in V$. Dann gibt es einen Algebra-Homomorphismus $u_0 : T(V) \to A$ mit

$$u_0(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) = u(x_1) \cdots u(x_m).$$

Es ist $u_0(x \otimes x - q(x) \cdot 1) = u(x)^2 - q(x) \cdot 1_A = 0$. Also liegt I in $\mathrm{Ker}(u_0)$, und u_0 induziert eine lineare Abbildung $\widehat{u} : T(V)/I \to A$ mit $u_0 = \widehat{u} \circ p$, also $\widehat{u} \circ j = u_0 \circ i = u$. Mit u_0 ist auch $\widehat{u}$ ein Algebra-Homomorphismus.

b) Es seien zwei Clifford-Algebren (C, j), (C', j') für (V, q) gegeben. Wegen der universellen Eigenschaft gibt es Algebra-Homomorphismen $f : C \to C'$ mit $f \circ j = j'$ und $g : C' \to C$ mit $g \circ j' = j$. Daraus folgt, dass f ein Isomorphismus und $g = f^{-1}$ ist. Die Eindeutigkeit folgt wie üblich. ∎

3.2 Satz. *Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V. Dann wird $C(V, q)$ (als Vektorraum) von 1 und den Produkten $j(e_{i_1}) \cdots j(e_{i_p})$, $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n$, erzeugt. Insbesondere ist $\dim_k(C(V, q)) \le 2^n$.*

Beweis: Es ist klar, dass $C = C(V, q)$ von den Produkten $j(e_{i_1}) \cdots j(e_{i_p})$ erzeugt wird. Weil $j(e_i) \cdot j(e_k) + j(e_k) \cdot j(e_i) = 2b(e_i, e_k) \cdot 1$ und $j(e_i)^2 = q(e_i) \cdot 1$ ist, braucht man nur die Fälle $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n$ zu betrachten. Davon gibt es höchstens $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. ∎

Die lineare Abbildung $-j : V \to C(V, q)$ erfüllt die Eigenschaft $(-j(x))^2 = j(x)^2 = q(x)$, also gibt es einen Algebra-Homomorphismus $\alpha : C \to C$ mit $\alpha \circ j = -j$. Es ist $\alpha \circ \alpha \circ j = -\alpha \circ j = -(-j) = j$, also $\alpha \circ \alpha = \mathrm{id}_C$. Man nennt α die *kanonische Involution*. Offensichtlich ist

$$C(V, q) = C^0(V, q) \oplus C^1(V, q),$$

mit

$$C^0(V, q) := \{x \in C \,:\, \alpha(x) = x\} \text{ und } C^1(V, q) = \{x \in C \,:\, \alpha(x) = -x\},$$

indem man $x \in C$ in $x^0 = \frac{1}{2}(x + \alpha(x))$ und $x^1 = \frac{1}{2}(x - \alpha(x))$ zerlegt.

Ist $x = p(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m)$, so ist

$$\alpha(x) = (-j(x_1)) \cdots (-j(x_m)) = (-1)^m j(x_1) \cdots j(x_m) = (-1)^m x.$$

Also ist $C^0(V, q) = p(T_0)$ und $C^1(V, q) = p(T_1)$, d.h. wir erhalten genau die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung.

Sind $A = A^0 \oplus A^1$ und $B = B^0 \oplus B^1$ zwei (endlich-dimensionale) $\mathbb{Z}_2$-graduierte Algebren, so definiert man ihr *graduiertes Tensorprodukt* durch

$$A \widehat{\otimes} B := (A \widehat{\otimes} B)^0 \oplus (A \widehat{\otimes} B)^1,$$

mit

$$(A\widehat{\otimes}B)^0 := (A^0 \otimes B^0) \oplus (A^1 \otimes B^1) \text{ und } (A\widehat{\otimes}B)^1 := (A^0 \otimes B^1) \oplus (A^1 \otimes B^0).$$

Die Multiplikation in $A\widehat{\otimes}B$ wird wie folgt festgelegt: Ist $u \in A$, $a_i \in A^i$, $v \in B$ und $b_j \in B^j$, so ist

$$(u \otimes b_j) \cdot (a_i \otimes v) := (-1)^{ij}(ua_i) \otimes (b_j v).$$

Die etwas seltsame Vorzeichenregel stellt sicher, dass man eine assoziative Algebra erhält (was natürlich auch bei $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$ der Fall gewesen wäre).

3.3 Satz.

a) *Sei u eine Isometrie zwischen quadratischen Räumen (V, q_V) und (W, q_W). Dann induziert u einen Algebra-Homomorphismus $\widehat{u} : C(V, q_V) \to C(W, q_W)$, der die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung respektiert.*

b) *Sind $f : A \to C$ und $g : B \to C$ Homomorphismen zwischen $\mathbb{Z}_2$-graduierten Algebren, die die Graduierungen respektieren, und ist*

$$f(x) \cdot g(y) = (-1)^{ij} g(y) \cdot f(x), \text{ für alle } x \in A^i \text{ und } y \in B^j,$$

so gibt es einen Algebra-Homomorphismus $h : A\widehat{\otimes}B \to C$ mit $h(x \otimes y) = f(x) \cdot g(y)$.

BEWEIS: a) Seien $j_V : V \to C(V, q_V)$ und $j_W : W \to C_W$ die kanonischen Inklusionen. Dann ist $u_0 := j_W \circ u : V \to C(W, q_W)$ linear und $u_0(x)^2 = (j_W(u(x)))^2 = q_W(u(x)) = q_V(x)$. Also induziert u_0 einen Algebra-Homomorphismus $\widehat{u} : C(V, q_V) \to C(W, q_W)$ mit $\widehat{u} \circ j_V = u_0$. Also ist

$$\widehat{u} \circ j_V = j_W \circ u.$$

Weil jetzt $\widehat{u}(j_V(x_1) \cdots j_V(x_m)) = j_W(u(x_1)) \cdots j_W(u(x_m))$ ist, respektiert $\widehat{u}$ die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung.

b) Die bilineare Abbildung $\widetilde{h} : A \times B \to C$ mit $\widetilde{h}(x, y) := f(x) \cdot g(y)$ induziert eine lineare Abbildung $h : A \otimes B \to C$ mit $h(x \otimes y) = f(x) \cdot g(y)$. Dabei ist zu beachten, dass $A \otimes B$ und $A\widehat{\otimes}B$ als Vektorräume übereinstimmen. Man rechnet leicht nach, dass h die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung respektiert. Es bleibt zu zeigen, dass h ein Algebra-Homomorphismus ist. Aber für $x \in A$, $y \in B$, $x_i \in A^i$ und $y_j \in B^j$ gilt:

$$\begin{aligned} h((x \otimes y_i) \cdot (x_j \otimes y)) &= (-1)^{ij} h((xx_j) \otimes (y_i y)) \\ &= (-1)^{ij} f(xx_j) \cdot g(y_i y) \\ &= (-1)^{ij} f(x) \cdot f(x_j) \cdot g(y_i) \cdot g(y) \\ &= f(x) \cdot g(y_i) \cdot f(x_j) \cdot g(y) \\ &= h(x \otimes y_i) \cdot h(x_j \otimes y). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

3.4 Satz. *Ist $V = V_1 \oplus V_2$ eine orthogonale Zerlegung und $q_i = q|_{V_i}$, so ist $C(V,q) \cong C(V_1,q_1)\widehat{\otimes}C(V_2,q_2)$.*

Beweis: Betrachte die lineare Abbildung $u : V_1 \oplus V_2 \to C(V_1,q_1)\widehat{\otimes}C(V_2,q_2)$, gegeben durch

$$u(x+y) := j_1(x) \otimes 1 + 1 \otimes j_2(y).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} u(x+y)^2 &= (x\otimes 1 + 1 \otimes y)^2 \\ &= (x\otimes 1)^2 + (x\otimes 1)\cdot(1\otimes y) + (1\otimes y)\cdot(x\otimes 1) + (1\otimes y)^2 \\ &= x^2 \otimes 1 + x\otimes y - x\otimes y + 1\otimes y^2 \\ &= (q_1(x)+q_2(y))\cdot 1\otimes 1 \;=\; q(x+y)\cdot 1. \end{aligned}$$

Also induziert u einen Algebra-Homomorphismus $\widehat{u} : C(V,q) \to C(V_1,q_1)\widehat{\otimes}C(V_2,q_2)$ mit $\widehat{u}\circ j = u$.

Wir konstruieren nun eine Umkehrabbildung: Sei $i_\lambda : V_\lambda \to V$ jeweils die kanonische Injektion und $\widehat{\imath}_\lambda : C(V_\lambda,q_\lambda) \to C(V,q)$ die induzierte Abbildung zwischen den Clifford-Algebren.

Ist $x \in V_1$ und $y \in V_2$, so ist $b_q(x,y) = 0$, also $j(i_1(x))\cdot j(i_2(y)) + j(i_2(y))\cdot j(i_1(x)) = 0$ (wenn $j : V \to C(V,q)$ die kanonische Abbildung ist). Daraus folgt: Für $x \in C(V_1,q_1)^i$ und $y \in C(V_2,q_2)^j$ ist

$$\widehat{\imath}_1(x)\cdot\widehat{\imath}_2(y) = (-1)^{ij}\widehat{\imath}_2(y)\cdot\widehat{\imath}_1(x).$$

Also gibt es einen Algebra-Homomorphismus $h : C(V_1,q_1)\widehat{\otimes}C(V_2,q_2) \to C(V,q)$ mit $h(x\otimes y) = \widehat{\imath}_1(x)\cdot\widehat{\imath}_2(y)$.

Für $x \in V_1$ ist $h\circ\widehat{u}\circ j\circ i_1(x) = h\circ u\circ i_1(x) = h(j_1(x)\otimes 1) = \widehat{\imath}(j_1(x)) = j\circ i_1(x)$. Analog ist $h\circ\widehat{u}\circ j\circ i_2(y) = j\circ i_2(y)$ für $y \in V_2$. Da V (als Vektorraum) von $i_1(V_1)$ und $i_2(V_2)$ erzeugt wird, ist $h\circ\widehat{u} = \mathrm{id}$.

Das Tensorprodukt $C(V_1,q_1)\widehat{\otimes}C(V_2,q_2)$ wird (als Algebra) von den Tensorprodukten $j_1(x)\otimes 1$ und $1\otimes j_2(y)$ (für $x \in V_1$ und $y \in V_2$) erzeugt. Nun ist $\widehat{u}\circ h(j_1(x)\otimes 1) = \widehat{u}(\widehat{\imath}_1(j_1(x))) = \widehat{u}\circ j\circ i_1(x) = u\circ i_1(x) = j_1(x)\otimes 1$ und analog $\widehat{u}\circ h(1\otimes j_2(y)) = 1\otimes j_2(y)$. Also ist $\widehat{u}\circ h = \mathrm{id}$. ∎

3.5 Folgerung. *Sei (V,q) ein quadratischer Raum über k und $\{e_1,\ldots,e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V (d.h. $b_q(e_i,e_j) = 0$ für $i \neq j$ und $q(e_i) = \pm 1$ oder $= 0$). Dann bilden 1 und die Produkte $j(e_{i_1})\cdots j(e_{i_p})$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, eine Basis von $C(V,q)$. Also ist $\dim_k C(V,q) = 2^n$ und $j : V \to C(V,q)$ injektiv.*

BEWEIS: a) Sei V ein 1-dimensionaler k-Vektorraum mit Basis $\{e\}$, q eine quadratische Form auf V und $\kappa := q(e) \in k$. Die Tensoralgebra $T(V)$ hat die Basis

$$\{1,\, e,\, e \otimes e,\, e \otimes e \otimes e,\, \ldots\}.$$

Offensichtlich ist $T(E) \cong k[X]$, mit $e \mapsto X$. Dabei wird das Ideal $I(q)$ auf das Ideal $J = (X^2 - \kappa)$ abgebildet. Somit ist die k-Algebra $k[X]/J$ ein Modell für die Cliffordalgebra $C(V,q)$. Die Abbildung $j : V \to k[X]/J$ ist durch $j(e) := X \mod J$ gegeben.

Ist $\kappa = 0$, so ist $C(V,q) \cong k[X]/(X^2) = \{a + b\cdot\varepsilon \,:\, a, b \in k\}$ (mit $\varepsilon^2 = 0$) der „Raum der dualen Zahlen“ (über k), mit Basis $\{1, \varepsilon\}$. Die Abbildung $j : V \to C(V,q)$ mit $j(e) = \varepsilon$ ist offensichtlich injektiv.

Ist $\kappa \neq 0$ ein Quadrat in k, etwa $\kappa = \varrho^2$, so bilden mit 1 und $j(e)$ auch die Vektoren

$$a_1 := \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varrho}\, j(e)\right) \quad \text{und} \quad a_2 := \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\varrho}\, j(e)\right)$$

ein Erzeugendensystem von $C(V,q)$ mit

$$a_1 \cdot a_1 = a_1,\ a_2 \cdot a_2 = a_2 \text{ und } a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1 = 0.$$

Man rechnet leicht nach, dass durch $(\xi, \eta) \mapsto \xi a_1 + \eta a_2$ ein Isomorphismus $k^2 \to C(V,q)$ definiert wird. Er ist ein Algebra-Isomorphismus, wenn man die Multiplikation auf k^2 definiert durch

$$(\xi_1, \eta_1) \cdot (\xi_2, \eta_2) = (\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2).$$

Dann bilden aber 1 und $j(e)$ sogar eine Basis, und j ist injektiv.

Ist κ kein Quadrat in k, so ist

$$C(V,q) \cong k[X]/(X^2 - \kappa) \cong k(\sqrt{\kappa})$$

eine quadratische Körpererweiterung, mit

$$(a_1 + b_1\sqrt{\kappa})(a_2 + b_2\sqrt{\kappa}) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 \kappa) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\sqrt{\kappa}.$$

Es ist klar, dass 1 und $j(e) = \sqrt{\kappa}$ eine Basis bilden und j injektiv ist. Ist z.B. $k = \mathbb{R}$ und $\kappa = -1$, so ist $C(V,q) \cong \mathbb{C}$ (als $\mathbb{R}$-Algebra).

b) Ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine ON-Basis von V, also $V = ke_1 \perp \ldots \perp ke_n$, so folgt per Induktion (mit $q_i := q|_{ke_i}$):

$$C(V,q) = C(ke_1, q_1) \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} C(ke_n, q_n).$$

Die Produkte $j(e_{i_1}) \cdots j(e_{i_p})$ stellen eine Basis dar, mit $j(e_i)^2 = q(e_i)$ und

$$j(e_i) j(e_k) + j(e_k) j(e_i) = 0 \text{ für } i \neq k.$$

Ist $q = 0$, so ist jede Basis eine ON-Basis, und $C(V, q) \cong \bigwedge(V)$ (als Algebra). Ist q beliebig, so ist $C(V, q)$ als *Vektorraum* isomorph zur äußeren Algebra, allerdings nicht als Algebra.

Weil $\dim_k C(ke_i, q_i) = 2$ ist, für alle i, folgt: $\dim_k C(V, q) = 2^n$. Weil die Bilder $j(e_i)$ der Basiselemente von V linear unabhängig in $C(V, q)$ sind, ist die kanonische Abbildung $j : V \to C(V, q)$ injektiv. ∎

Wir können nun die Struktur einiger einfacher Clifford-Algebren genauer bestimmen. Dabei unterscheiden wir oftmals nicht zwischen den Vektoren $v \in V$ und ihren Bildern $j(v)$ in $C(V, q)$.

Ist $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$ und $n = r + s$, so sei

$$q_{r,s}(x_1, \ldots, x_n) := x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_{r+s}^2 .$$

A) Sei $V = \mathbb{R}^2$ (mit Basiselementen $\mathsf{i} := (1, 0)$ und $\mathsf{j} := (0, 1)$) und

$$q(x_1, x_2) = q_{0,2}(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2.$$

Dann ist $C(V, q) = C(\mathbb{R}\mathsf{i})\widehat{\otimes}C(\mathbb{R}\mathsf{j})$ ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, mit Basis $\{1, \mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k} := \mathsf{i}\,\mathsf{j}\}$. Es ist

$$\mathsf{i}^2 = \mathsf{j}^2 = -1 \text{ und } \mathsf{i}\,\mathsf{j} + \mathsf{j}\,\mathsf{i} = 2b_q(\mathsf{i}, \mathsf{j}) = 0.$$

Dann ist auch

$$\mathsf{k}^2 = (\mathsf{i}\,\mathsf{j})(\mathsf{i}\,\mathsf{j}) = -(\mathsf{i}\,\mathsf{i})(\mathsf{j}\,\mathsf{j}) = -1.$$

Durch diese Algebra-Struktur ist $C(V, q) \cong \mathbb{H}$ der (Schief-)Körper der *Quaternionen*! Wir werden $\mathbb{H}$ weiter unten genauer untersuchen.

B) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und

$$q(x_1, x_2) = q_{2,0}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Ist $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$, so ist $C(V, q) = C(\mathbb{R}\mathbf{e}_1)\widehat{\otimes}C(\mathbb{R}\mathbf{e}_2) = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_1)\widehat{\otimes}(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_2)$. Das ist wieder eine 4-dimensionale $\mathbb{R}$-Algebra, mit Basis

$$\{1 = 1 \otimes 1,\ a = \mathbf{e}_1 \otimes 1,\ b = 1 \otimes \mathbf{e}_2,\ c = ab = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2\}$$

und einer offensichtlichen $\mathbb{Z}_2$-Graduierung.

Die Algebra $M_2(\mathbb{R})$ der 2-reihigen quadratischen Matrizen besitzt eine Basis $\{1, A, B, C\}$ mit

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$C := AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -BA .$$

Dann ist $A^2 = B^2 = 1$ und $C^2 = (AB)(AB) = -A^2B^2 = -1$. Außerdem ist $AC = B$ und $BC = -A$. So erhält man eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung auf $M_2(\mathbb{R})$. Die Elemente 1 und C sind „gerade", die Elemente A und B „ungerade". Die Matrizen-Multiplikation respektiert die Graduierung. Nun haben wir Algebra-Homomorphismen

$$f : C(\mathbb{R}\mathbf{e}_1) \to M_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad g : C(\mathbb{R}\mathbf{e}_2) \to M_2(\mathbb{R})$$

mit

$$f(s+u\mathbf{e}_1) = s\cdot 1+u\cdot A = \begin{pmatrix} s+u & 0 \\ 0 & s-u \end{pmatrix} \text{ und } g(t+v\mathbf{e}_2) = t\cdot 1+v\cdot B = \begin{pmatrix} t & v \\ v & t \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$f(\mathbf{e}_1)\cdot g(\mathbf{e}_2) = A\cdot B = -B\cdot A = -g(\mathbf{e}_2)\cdot f(\mathbf{e}_1).$$

Also gibt es einen (graduierten) Algebra-Homomorphismus : $C(V,q) \to M_2(\mathbb{R})$ mit $h(x\otimes y) = f(x)\cdot g(y)$. Da alle Basiselemente im Bild vorkommen, ist h surjektiv, also ein Isomorphismus.

C) Sei nochmals $V = \mathbb{R}^2$, jetzt aber

$$q(x_1,x_2) = q_{1,1}(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

Das ist der einfachste Fall eines „Minkowski-Raumes". Hier gibt es eine Basis $\{1,u,v,uv\}$ mit $u^2 = 1$, $v^2 = -1$, $uv = -vu$ und $(uv)^2 = -u^2v^2 = 1$. Ein Modell liefern die Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } W = UV = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\ ,$$

denn die lineare Abbildung $\varphi : V \to M_2(\mathbb{R})$ mit $\varphi(\mathbf{e}_1) := U$, $\varphi(\mathbf{e}_2) := V$ und $\varphi(x_1,x_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & x_1+x_2 \\ x_1-x_2 & 0 \end{pmatrix}^2 = q_{1,1}(x_1,x_2)\cdot E_2$ induziert einen Algebra-Homomorphismus $\widehat{\varphi} : C(V,q_{1,1}) \to M_2(\mathbb{R})$ mit $\widehat{\varphi}\circ j = \varphi$. Da die Bilder $\widehat{\varphi}(1) = E_2$, $\widehat{\varphi}(\mathbf{e}_1) = U$, $\widehat{\varphi}(\mathbf{e}_2) = V$ und $\widehat{\varphi}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2) = UV = W$ die ganze Matrizenalgebra erzeugen, ist $\widehat{\varphi}$ surjektiv. Aus der Gleichheit der Dimensionen folgt, dass $\widehat{\varphi}$ ein Isomorphismus ist.

Jetzt soll die Algebra der Quaternionen näher untersucht werden.

Ist $x = a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \in \mathbb{H}$, so nennt man $\mathrm{Re}(x) := a$ den *Realteil* von x und $\mathrm{Im}(x) := b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k}$ den *Imaginärteil* von x. Quaternionen ohne Realteil nennt man manchmal auch *reine* (oder *rein imaginäre* oder *vektorielle*) Quaternionen.

3.6 Satz. *Sei $x = a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \in \mathbb{H}$.*

1. *x ist genau dann reell, wenn $xy = yx$ für alle $y \in \mathbb{H}$ gilt.*

2. x ist genau dann rein imaginär, wenn x^2 eine reelle Zahl ≤ 0 ist.

Beweis: 1) Die Richtung „$\Longrightarrow$“ ist klar. Sei umgekehrt x mit allen $y \in \mathbb{H}$ vertauschbar. Dann ist x insbesondere mit i vertauschbar, also

$$a\mathsf{i} - b + c\mathsf{k} - d\mathsf{j} = \mathsf{i}\,x = x\mathsf{i} = a\mathsf{i} - b - c\mathsf{k} + d\mathsf{j}\,.$$

Daraus folgt, dass $2(c\mathsf{k} - d\mathsf{j}) = 0$ ist, also $c = d = 0$. Aber x ist auch mit j vertauschbar, d.h., es ist

$$a\mathsf{j} - b\mathsf{k} = \mathsf{j}\,x = x\mathsf{j} = a\mathsf{j} + b\mathsf{k}\,.$$

Daraus folgt $b = 0$, und x ist reell.

2) Sei $x = b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k}$ rein imaginär. Dann ist

$$x^2 = -(b^2 + c^2 + d^2) + bc\mathsf{k} - bd\mathsf{j} - bc\mathsf{k} + cd\mathsf{i} + bd\mathsf{j} - cd\mathsf{i} = -(b^2 + c^2 + d^2) \leq 0.$$

Ist x beliebig, so ist $x^2 = a^2 + 2a(b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k}) + (b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k})^2 = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2a(b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k})$. Ist x^2 reell, so muss entweder $a = 0$ (und x rein imaginär) sein, oder $b = c = d = 0$. Im letzteren Fall ist $x^2 = a^2$. Ist außerdem $x^2 \leq 0$, so muss sogar $x = 0$ sein. ∎

Ist A eine k-Algebra, so nennt man $Z(A) = \{x \in A \,:\, xy = yx \text{ für alle } y \in A\}$ das *Zentrum* von A. Wir haben oben gezeigt, dass $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ ist.

Ist $x = a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k} \in \mathbb{H}$, so setzt man $\overline{x} := \mathrm{Re}(x) - \mathrm{Im}(x) = a - b\mathsf{i} - c\mathsf{j} - d\mathsf{k}$. Die *Konjugation* $x \mapsto \overline{x}$ ist ein $\mathbb{R}$-Algebra-Anti-Automorphismus, d.h.:

$$\begin{aligned} \overline{x+y} &= \overline{x} + \overline{y}, \\ \overline{r \cdot x} &= r \cdot \overline{x} \text{ für } r \in \mathbb{R} \\ \text{und } \overline{xy} &= \overline{y}\,\overline{x}. \end{aligned}$$

Zum Beweis und auch zu anderen Zwecken ist es günstig, die Quaternionen durch Matrizen zu beschreiben. Dazu sei

$$\mathscr{H} := \{\begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} \,:\, w, z \in \mathbb{C}\}\,.$$

Dann ist $\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uw - v\overline{z} & uz + v\overline{w} \\ -\overline{uz} - \overline{v}w & \overline{uw} - \overline{v}z \end{pmatrix}$ und daher $\mathscr{H}$ eine assoziative $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $M_2(\mathbb{C})$, allerdings keine $\mathbb{C}$-Algebra! Außerdem liefert die Zuordnung $w \mapsto \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix}$ eine Injektion $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathscr{H}$ (als Unteralgebra).

Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathscr{H}$ mit $f(s,t) := \begin{pmatrix} s\mathsf{i} & t \\ -t & -s\mathsf{i} \end{pmatrix}$ erfüllt die Gleichung

$$f(s,t)^2 = \begin{pmatrix} s\mathsf{i} & t \\ -t & -s\mathsf{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s\mathsf{i} & t \\ -t & -s\mathsf{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s^2-t^2 & 0 \\ 0 & -s^2-t^2 \end{pmatrix} = q(s,t)\cdot E,$$

mit $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $q(s,t) = -s^2 - t^2$.

Wegen der universellen Eigenschaft der Clifford-Algebren gibt es einen Algebra-Homomorphismus $\widehat{f} : C(\mathbb{R}^2, q) = \mathbb{H} \to \mathscr{H}$, mit $1 \mapsto E$, $\mathsf{i} \mapsto I := f(1,0) = \begin{pmatrix} \mathsf{i} & 0 \\ 0 & -\mathsf{i} \end{pmatrix}$, $\mathsf{j} \mapsto J := f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathsf{k} \mapsto K := IJ = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{i} \\ \mathsf{i} & 0 \end{pmatrix}$.
Dann ist

$$\widehat{f}(a + b\mathsf{i} + c\mathsf{j} + d\mathsf{k}) = \begin{pmatrix} a+b\mathsf{i} & c+d\mathsf{i} \\ -c+d\mathsf{i} & a-b\mathsf{i} \end{pmatrix}.$$

Jedes Element $x \in \mathbb{H}$ kann eindeutig in der Form

$$x = w + z\mathsf{j}\,,\ w, z \in \mathbb{C},$$

geschrieben werden. Dabei ist es wichtig, dass j von rechts heranmultipliziert wird, und es ist zu beachten, dass $z\mathsf{j} = \mathsf{j}\,\overline{z}$ ist. Der Isomorphismus $\mathbb{H} \cong \mathscr{H}$ wird nun noch offensichtlicher.

Es ist $\overline{x} = \overline{w} - z\mathsf{j}$ und $\widehat{f}(\overline{x}) = \overline{\widehat{f}(x)}^\top$. Weil $\overline{X \cdot Y}^\top = \overline{Y}^\top \cdot \overline{X}^\top$ ist, folgt die Gleichung $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$.

Weiter ist $\det \widehat{f}(w + z\mathsf{j}) = |w|^2 + |z|^2$ und $\mathrm{Spur}(\widehat{f}(w + z\mathsf{j})) = 2\,\mathrm{Re}(w)$.

Wir schreiben jetzt Quaternionen in der Form $x = \mathrm{Re}(x) + \vec{x}$, wobei $x_0 := \mathrm{Re}(x) \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} = x_1\mathsf{i} + x_2\mathsf{j} + x_3\mathsf{k}$ der vektorielle Teil ist. Dann ist $\vec{x} \cdot \vec{y} = -\vec{x} \bullet \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}$, wobei $\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ das euklidische Skalarprodukt und

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathsf{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathsf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathsf{k}$$

das Vektorprodukt ist. Man sieht sofort, dass $\vec{x} \times \vec{x} = 0$ ist.

Sind $x = x_0 + \vec{x}$ und $y = y_0 + \vec{y}$ beliebige Quaternionen, so ist

$$\mathrm{Re}(x \cdot y) = x_0y_0 - \vec{x} \bullet \vec{y} = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$$

das Minkowski-Skalarprodukt, so wie es gerne von den Physikern definiert wird.

Weil $\overline{x} = x_0 - \vec{x}$ ist, folgt: $<x\,,\,y> := \mathrm{Re}(x \cdot \overline{y}) = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ist das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^4$. Insbesondere ist

$$x \cdot \overline{x} = (x_0 + \vec{x}) \cdot (x_0 - \vec{x}) = x_0^2 - [-\vec{x} \bullet \vec{x} + \vec{x} \times \vec{x}] = x_0^2 + \|\vec{x}\|^2 = <x\,,\,x>.$$

Jetzt kann man auch sehen, dass jedes Element $x \neq 0$ in $\mathbb{H}$ ein multiplikatives Inverses besitzt:

$$x^{-1} = \frac{1}{x\overline{x}} \cdot \overline{x}\,.$$

Die Zahl $|x| := \sqrt{x\overline{x}}$ nennt man den *Betrag* oder die *Norm* von x.

3.7 Satz. *Für $x, y \in \mathbb{H}$ ist $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.*

Beweis: Es ist $|xy|^2 = xy \cdot \overline{xy} = xy \cdot \overline{y}\,\overline{x} = (x\overline{x})(y\overline{y}) = |x|^2 \cdot |y|^2$. Daraus folgt die Behauptung. ∎

$S^3 := \{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\}$ ist die „3-Sphäre" im $\mathbb{R}^4$. Bezüglich der Quaternionen-Multiplikation ist S^3 eine Untergruppe von $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$.

Behauptung: *Ist $z \in \mathbb{H}^*$, so wird durch*

$$\varrho_z(\vec{x}) := z \cdot \vec{x} \cdot z^{-1}$$

eine orthogonale Abbildung $\varrho_z : \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ definiert.

Beweis: Es ist $(z\vec{x}z^{-1})^2 = z\vec{x}z^{-1}\, z\vec{x}z^{-1} = z(\vec{x})^2 z^{-1} = (\vec{x})^2$ reell und ≤ 0, also $\varrho_z(\vec{x})$ wieder rein imaginär. Offensichtlich ist ϱ_z linear und $|\varrho_z(\vec{x})| = |z\vec{x}z^{-1}| = |z| \cdot |\vec{x}| \cdot |z|^{-1} = |\vec{x}|$. Also ist ϱ_z orthogonal. ∎

3.8 Satz. *Die durch $z \mapsto \varrho_z$ gegebene Abbildung $\varrho : S^3 \to SO(3)$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathbb{Z}_2$.*

Beweis: a) Für $z \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ sei $\sigma_z(\vec{x}) := -z\vec{x}z^{-1}$. Das ist eine orthogonale Abbildung mit $\varrho_z(z) = -z$. Ist $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ und $z \bullet y = 0$, so ist

$$0 = \langle z\,,\, y\rangle = \mathrm{Re}(z\overline{y}) = \frac{1}{2}[z\overline{y} + y\overline{z}] = -\frac{1}{2}[zy + yz],$$

also $zy = -yz$ und $\sigma_z(y) = -zyz^{-1} = yzz^{-1} = y$. Also ist σ_z die Spiegelung an der Ebene $H = (\mathbb{R}z)^\perp \subset \mathrm{Im}(\mathbb{H})$.

b) Offensichtlich ist $\sigma_z \circ \sigma_w = \varrho_{zw} = \varrho_z \circ \varrho_w$.

c) Ist $x = x_0 + \vec{x} \in \mathbb{H}$ beliebig und $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$, $y \neq 0$ und $\vec{x} \bullet y = 0$, so ist $x \cdot y = x_0 y + \vec{x} \cdot y = x_0 y + \vec{x} \times y$ rein imaginär und $x = (x_0 y + \vec{x} \times y) \cdot y^{-1}$, wobei $y^{-1} = -\frac{1}{y\overline{y}} \cdot y$ ebenfalls rein imaginär ist. Damit ist jedes $x \in \mathbb{H}$ Produkt zweier vektorieller Quaternionen und jede Transformation ϱ_z Produkt zweier Spiegelungen und damit ein Element aus $SO(3)$.

Klar ist, dass ϱ ein Gruppenhomomorphismus ist. Da jede Drehung Produkt von Spiegelungen ist und jede Spiegelung in der Form σ_z geschrieben werden kann, ist $\varrho : \mathbb{H}^* \to SO(3)$ surjektiv. Weil $\varrho_{\lambda z} = \varrho_z$ ist, ist auch $\varrho : S^3 \to SO(3)$ surjektiv.

Sei nun $z \in \mathbb{H}^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varrho_z = \mathrm{id} \quad &\iff \quad zxz^{-1} = x \text{ für alle } x \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \\ &\iff \quad zx = xz \text{ für alle } x \in \mathbb{H} \\ &\iff \quad z \in Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R} \cdot 1. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(\mathbb{R} \cdot 1) \cap S^3 = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2$. ∎